

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 22 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 21.01.22

8. Integration (Forts.)

Wir beobachten ein paar Eigenschaften des Integrals und schwächen gleichzeitig einige der Voraussetzungen ab:¹

► **Linearität**

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (1)$$

► **Stückweises Integrieren**

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (2)$$

► **Für Abschätzungen:**

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (3)$$

sowie

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad (4)$$

<https://youtu.be/JMzFx3FhaJs> (6 min) (5)

8.2 Integrationstechniken

Satz 17. (Partielle Integration)

Seien f und g stetig auf $[a, b]$ und stetig diffbar auf (a, b) , dann gilt

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx \quad (6)$$

Beweis:

<https://youtu.be/Zn1zmTqGFRc> (3 min) (7)

Beispiele:

$$\int x \sin x dx \quad \text{https://youtu.be/ApuPRUy6wBs (3 min)} \quad (8)$$

¹Gesammelte Erklärungen im Video darunter.

$$\int \log x \, dx \quad \text{https://youtu.be/xMwcBX0Eumk (3 min)} \quad (9)$$

Bestimmen Sie ähnlich wie im letzten Beispiel eine Stammfunktion des Arkustanges.

Im Livestream werde ich vorführen, wie wir mit partieller Integration auch $\int \sin^2 x \, dx$ knacken – falls Sie schon mal überlegen möchten, wie das gehen könnte.

Aber egal wie toll meine Videos zur partiellen Integration sind, an das hier komme ich leider nicht ran: <https://youtu.be/-reFBJ4R9iA>

Der Beweis des Taylorsche Satzes ist eine hübsche Anwendung der partiellen Integration.

Satz 18. (Integralrestglied für Taylor)

Sei f $(n+1)$ -mal stetig diffbar auf (a, b) , dann gilt

$$f(x) - \sum_{\nu=0}^n \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^\nu = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x - t)^n \, dt, \quad (10)$$

wobei $x, x_0 \in (a, b)$.

Beweis:

$$\text{https://youtu.be/Hc8W_4-RohE (10 min)} \quad (11)$$

Den Satz von Taylor mit dem anderen (unbewiesenen) Restglied haben wir nur verwendet, um zu zeigen, dass die exp-Reihe überall konvergiert. **Können Sie** das auch mit dem Integralrestglied zeigen?

Satz 19. (Substitutionsregel)

Sei f stetig auf I und $g : [a, b] \rightarrow J \subset I$ stetig diffbar, dann gilt

$$\int_a^b f(g(t)) g'(t) \, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \, dx. \quad (12)$$

Beweis: (mit Anwendungsanleitung und Beispiel)

$$\text{https://youtu.be/Bch0bv02kEg (7 min)} \quad (13)$$

Weitere Beispiele:

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \log x} \quad \text{https://youtu.be/4sYGmkUw8-s (1 min)} \quad (14)$$

$$\int \tan x \, dx \quad \text{https://youtu.be/L5qCr53N9aQ (2 min)} \quad (15)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{https://youtu.be/j0w1300_Dow (2 min)} \quad (16)$$

Bestimmen Sie

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \, dx. \quad (17)$$