Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 21/22
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 23 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 26.01.22

8.3 Riemannsche Zwischensummen

In diesem Abschnitt des Skripts lernen wir, wie so ein Integral präzise definiert werden kann. Das dient momentan primär der Allgemeinbildung. Werfen Sie mal einen Blick drauf. Die technischen Details dürfen Sie zunächst auch gerne überspringen.

Was sollten wir uns merken?
(a) Die Definition einer Zwischensumme: Gln. (8.72) und das zugehörige Bild.
(b) Hinter jedem Integral versteckt sich ein (komplizierter) Grenzwert.

8.1 Uneigentliche Integrale

Wir definieren

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{1}$$

falls $\int_a^b \dots$ für beliebig große b existiert.

Beispiel:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \texttt{https://youtu.be/H4H2w1F9-fg}\ (7\,\mathrm{min}) \tag{2}$$

Überlegen Sie selbst: Haben die folgenden Integrale einen endlichen Wert?

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\,,\quad \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\,,\quad \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/4}}\,,\quad \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{4/3}} \tag{3}$$

Falls $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \pm\infty$, definieren wir analog ($a < b$)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{y\to b-}\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

Beispiel:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \texttt{https://youtu.be/hv02pdYUwmU}\ (7\,\mathrm{min}) \tag{5}$$

Überlegen Sie selbst: Haben die folgenden Integrale einen endlichen Wert?

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\,,\quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/4}}\,,\quad \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \tag{6}$$

Liegt die problematische Stelle mitten im Integrationsintervall, so erzeugt dies typischerweise *zwei* Limites.

Beispiel:

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x \qquad \texttt{https://youtu.be/oV5JGGuo-XI}\ (6\,\mathrm{min}) \tag{7}$$