Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 21/22
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 5 (Abgabe spätestens 26.11.2021, 8:00)

Aufgabe 24 (3+5+3 = 11 Punkte)
Die Umkehrfunktion des *Sinus Hyperbolicus* heißt *Areasinus Hyperbolicus*, Funktionsname Arsinh, d.h. $\operatorname{Arsinh}(\sinh(x)) = x$, analog für die anderen hyperbolischen Funktionen. Geben Sie die maximalen Definitions- und Wertebereiche für

a) $\operatorname{Arsinh} x$, b) $\operatorname{Arcosh} x$ und c) $\operatorname{Artanh} x$

an. Bei (a) und (c) ist dies eindeutig – bei (b) können wir zwei Zweige angeben. Berechnen Sie dann mithilfe von Satz 6 die Ableitungen dieser Funktionen.

Bemerkung: Sie benötigen dazu keine expliziten Darstellungen der Umkehrfunktionen, sondern lediglich die Ableitungen aus Aufgabe 22.

Aufgabe 25 (12 Punkte)
Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie dort die Ableitung.

$$f_1(x) = 7^x\,, \qquad f_2(x) = \big(\log(x^2)\big)^3\,, \qquad f_3(x) = \log_7(x)\,, \qquad f_4(x) = x^x\,.$$

Aufgabe 26 (6 Zusatzpunkte)
Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$. Hinweis: Die Regel von l'Hospital ist hilfreich.

Aufgabe 27 (6+2+2 = 10 Zusatzpunkte)
Sei

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}\,.$$

a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit (i) $f(x) = 1$, (ii) $f(x) = -1$ und (iii) $f(x) = 0$.
b) Skizzieren Sie den Graph von f.
c) Ist f in Null stetig? Argumentieren Sie mit ε und δ, und verwenden Sie dabei Ihre Ergebnisse aus Teil a.

Aufgabe 28 (16 Punkte)
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \quad \forall\ |x| < 1\,.$$

Bestimmen Sie *damit* die Taylorreihen der folgenden Funktionen um Null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

a) $\dfrac{1}{21-x}$ b) $\dfrac{1}{1+x^2}$ c) $\dfrac{x^{21}}{1-x^3}$ d) $\dfrac{1+x}{1-x}$

Hinweis: Sie müssen (und sollen) keine Ableitungen berechnen.

Aufgabe 29 (8 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 09.01.22 auf `www.khanacademy.org` die Skills

- *Limits using trig identities*,
- *Limits at infinity of quotients with trig*,
- *Infinite geometric series* und
- *Function as a geometric series.*

Hinweise: (i) Siehe Aufgabe 6 (Blatt 1).

$$\text{(ii) } \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}\,, \quad \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}\,, \quad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}\,.$$