Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 21/22

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 6 (Abgabe spätestens 03.12.2021, 8:00)

Aufgabe 30 (12 Zusatzpunkte)
Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\sinh x$ b) $\cosh x$ c) $\operatorname{Artanh} x$

um $x_0 = 0$. Wo konvergieren die Reihen gegen die jeweilige Funktion?

Aufgabe 31 (4 Zusatzpunkte)
Begründen Sie geometrisch, dass $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Leiten Sie daraus und mithilfe der arctan-Reihe eine Reihendarstellung für π her. Nennen Sie die Summe der ersten n Terme dieser Reihe π_n. Berechnen Sie (mit Taschenrechner oder Computer) π_n für einige Werte von n, und vergleichen Sie mit dem Ihnen bekannten Wert für π.

Aufgabe 32 (16 Punkte)
Berechnen Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen (ggf. stetig fortgesetzt) um null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

a) e^{-x^2} b) $\dfrac{x - \sin x}{x^3}$ c) $\dfrac{1}{(1-x)(3-x)}$ d) $\dfrac{1 - \cos x}{1 - x^2}$

Aufgabe 33 (8 Punkte)
Bestimmmen Sie die folgenden Grenzwerte (mit Erklärung/Herleitung)!

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\big(1 - \cos(2x)\big)^8 \sin^3(x)}{(\mathrm{e}^{2x} - 1)^{21}}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^{2021}(x)}{x^{11} \left(\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right)^{402}}$

Aufgabe 34 (12 Punkte)
Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\dfrac{1}{21 + x}$ um $x_0 = 21$, b) e^{-x} um $x_0 = 3$ und c) $\cos x$ um $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Wo konvergieren die Reihen gegen die jeweiligen Funktionen?

Aufgabe 35 (6 Zusatzpunkte)
Üben Sie bis spätestens 09.01.22 auf `www.khanacademy.org` die Skills

- *Taylor & Maclaurin polynomials*,
- *Integrals & derivatives of functions with known power series* und
- *Maclaurin series for* $\sin x$, $\cos x$, *and* e^x

Hinweise: (i) Siehe Aufgabe 6 (Blatt 1).
(ii) Die Taylorreihe um Null heißt auch Maclaurin-Reihe.