Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 21/22

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 7 (Abgabe spätestens 10.12.2021, 8:00)

Aufgabe 36 (keine Abgabe)

Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat die Funktion f_a definiert durch

$$f_a(x) = \frac{1 + x\sin(ax)}{1 + x^2}$$

bei Null ein Maximum, für welche ein Minimum? Begründen Sie Ihre Antwort!
HINWEIS: Berechnen Sie keine Ableitungen, verwenden Sie Taylorentwicklungen.

Aufgabe 37 (keine Abgabe)

Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|(x-2) + 2}{|x|}$$

für reelle x. Achten Sie dabei insbesondere auf den (maximalen) Definitionsbereich, stetige Fortsetzbarkeit, Asymptoten, Nullstellen sowie Hoch- und Tiefpunkte, und zeichnen Sie die den Graph der Funktion.

Aufgabe 38 (12 Punkte)

Welche der folgenden Mengen M sind Vektorräume über $\mathbb{R}$?[1] Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_3 = 21x_1\,,\ x_1 - x_2 = x_3 \right\}$

b) $M = \{$Polynome vom Grad ≤ 4 mit reellen Koeffizienten
und Steigung 21 im Ursprung$\}$

c) $M = \{$Polynome vom Grad ≤ 4 mit reellen Koeffizienten
und einer Nullstelle bei 21$\}$

Aufgabe 39 (10 Zusatzpunkte)

Die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$, genannt $C([a,b])$, ist ein Vektorraum über den reellen Zahlen. Für $x \in [-\pi,\pi]$ sei $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = \cos(2x)$ und $f_4(x) = \cos^2(x)$. Zeigen Sie:

a) f_1, f_2, f_3, f_4 sind linear abhängig in $C([-\pi,\pi])$.
b) f_1, f_2, f_3 sind linear unabhängig in $C([-\pi,\pi])$.

[1] Überlegen Sie nur, ob aus $\vec{x}, \vec{y} \in M$ folgt, dass auch $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in M \ \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Die Rechenregeln bekommen wir geschenkt. (Warum?)

Aufgabe 40 (12 Punkte)

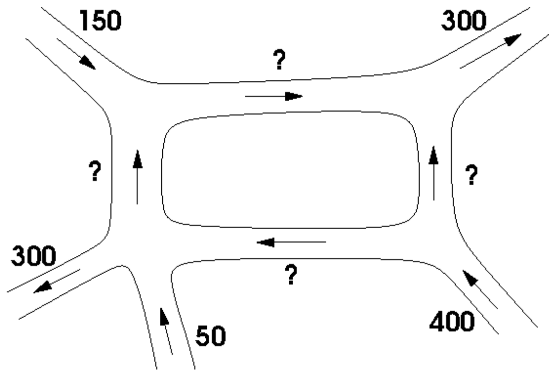
Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind, und stellen Sie – falls möglich – den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombination dieser Vektoren dar.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 41 (10 Punkte)

Rechts ist der Ausschnitt eines Stadtplans gezeigt, in dem nur Einbahnstraßen zu sehen sind. An jedem Straßenabschnitt wurde eingetragen, wieviele Autos dort während einer bestimmten Zeit entlang gefahren sind. Wir nehmen an, dass alle Autos ihre Fahrt außerhalb des Ausschnitts begonnen und beendet haben.



Was können Sie über die Anzahlen der Autos sagen, die die vier mit Fragezeichen markierten Staßen benutzten? Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem auf, bringen Sie dieses auf Zeilenstufenform und geben Sie die Lösungsmenge an. Geben Sie außerdem für jede, der vier Straßen die größt- und die kleinstmögliche Zahl an Autos an.

Hinweis: Zur besseren Vergleichbarkeit bezeichnen Sie bitte die Anzahl der Autos auf den vier Staßen im Uhrzeigersinn mit $x_1, \ldots, x_4$ beginnend mit der unteren.

Aufgabe 42 (6 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 09.01.22 auf `www.khanacademy.org` die Skills

- *Combined vector operations*,
- *Number of solutions to a system of equations algebraically* und
- *Systems of equations word problems.*

Hinweise: Siehe Aufgabe 6 (Blatt 1).