Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 21/22

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 8 (Abgabe spätestens 17.12.2021, 8:00)

Aufgabe 43 (8 Punkte)
Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen (wobei $x, y \in \mathbb{R}$).

a) $\dfrac{104 + 26\mathrm{i}}{3 - 2\mathrm{i}}$ b) $(x - \mathrm{i}y)^3$ c) $\sqrt{10}\, \exp\left(\frac{1}{2}\log 5 - \mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right)$ d) $\cos(x + \mathrm{i}y)$

Aufgabe 44 (14 Punkte)
Überprüfen Sie, ob durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jeweils ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

a) $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$ b) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 3a_3 b_3$

c) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 - a_2 b_2$ d) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_2 b_2$

e) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 2a_3 b_3 - a_2 b_3 - a_3 b_2$

Hinweis: Die Eigenschaften (S1) und (S2) können Sie für alle Aufgabenteile gleichzeitig überprüfen, denn alle Abbildungen haben die Form $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_j \sum_k \mu_{jk} a_j b_k$ mit $\mu_{kj} = \mu_{jk}$.

Aufgabe 45 (12 Punkte)
Seien

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ und die zugehörige Norm.
Berechnen Sie die Normen $\|\vec{a}_j\| = |\vec{a}_j|$, $j = 1, 2, 3$
und alle Skalarprodukte $\langle \vec{a}_j, \vec{a}_k \rangle = \vec{a}_j \cdot \vec{a}_k$, $j \neq k$.

b) Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das Skalarprodukt aus Aufgabe 44e und die zugehörige Norm.
Berechnen Sie die Normen $\|\vec{a}_j\|$, $j = 1, 2, 3$
und alle Skalarprodukte $\langle \vec{a}_j, \vec{a}_k \rangle$, $j \neq k$.

Aufgabe 46 (5 Zusatzpunkte)
Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

$$\begin{pmatrix} \beta \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}.$$