Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 21/22

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 10 (Abgabe spätestens 14.01.2022, 8:00)

Aufgabe 53 (8 Punkte)

Geben Sie die folgenden Punkte (x, y, z) aus $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) an:

a) $(0, -2, 0)$ b) $(0, 0, -\pi)$ c) $(1, 0, -1)$ d) $(-1, 1, \sqrt{2}\,)$

Aufgabe 54 (10 Punkte)

Berechnen Sie – falls möglich – für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) AA^T, b) A^TA, c) AA^TB, d) A^TAB,
e) B^TAA^T, f) A^2, g) A^TAA^TA.

Hinweis: Assoziativität, d.h. $(AB)C = A(BC)$, ist hilfreich.

Aufgabe 55 (keine Abgabe)

Wir definieren die Potenz A^n einer quadratischen Matrix A durch

$$A^0 = I \text{ und } A^{n+1} = AA^n\,,$$
$$\text{d.h.} \quad A^0 = I\,, \quad A^1 = A\,, \quad A^2 = AA\,, \quad A^3 = AAA\,, \ \ldots$$

Weiter definieren wir e^{Ax} für $x \in \mathbb{R}$ durch die bekannte Taylorreihe der e-Funktion, d.h. $e^{Ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n$. Berechnen Sie e^{Ax} für $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Hinweise: (i) Berechnen Sie zunächst A^2, A^3 und A^4. Folgern Sie daraus, wie A^n aussieht.
(ii) Aus der Definition der Matrixaddition (komponentenweise) folgt

$$\sum_n \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_n a_n & \sum_n b_n \\ \sum_n c_n & \sum_n d_n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 56 (6 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 04.02.22 auf `www.khanacademy.org` die Skills

- *Matrix elements*,
- *Matrix equations: scalar multiplication* und
- *Multiply matrices.*

Hinweise: Siehe Aufgabe 6 (Blatt 1).