Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 21/22

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 12 (Abgabe spätestens 28.01.2022, 8:00)

Aufgabe 61 (10 Punkte)
Bestimmen Sie eine bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{C}^4$ orthonormierte Basis des Unterraums $U \subset \mathbb{C}^4$ gegeben durch

$$U = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe 62 (12 Punkte)
Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{3x^2 + 2 - \sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ c) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{2022} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$

Aufgabe 63 (12 Punkte)
Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(2x)\cos x\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 64 (4+6=10 Zusatzpunkte)
Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{(\log x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 65 (8 Zusatzpunkte)
Die Menge der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$,

$$C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (vgl. Aufgabe 39). Zeigen Sie: $\langle\cdot,\cdot\rangle : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}$ mit

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

ist ein Skalarprodukt.