Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 21/22

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Klausur am 11.02.2022

- Drucken Sie die Klausur aus (einseitig).
- Tragen Sie im Abschnitt *Erklärung* Vorname, Name und Matrikelnummer ein.
- Wenn Sie keinen Drucker benutzen können oder möchten, dann schreiben Sie den Abschnitt *Erklärung* ab, und schreiben Sie die Aufgabenstellungen (oder zumindest die Formeln daraus) ab – jede Aufgabe auf eine eigene Seite!
- Tragen Sie bei *Beginn* die aktuelle Uhrzeit ein.
- Bearbeiten Sie die Klausur. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- Beenden Sie nach spätestens 120 Minuten die Bearbeitung.
  Tragen Sie bei *Ende* die aktuelle Uhrzeit ein.
- Unterschreiben Sie den Abschnitt *Erklärung*.
- Scannen Sie die Erklärung. Scannen Sie Ihre Lösungen – je ein Dokument pro Aufgabe, auch unbearbeitete Aufgaben!
- Laden Sie die Erklärung wie angegeben hoch. Laden Sie Ihre Lösungen wie angegeben hoch – auch unbearbeitete Aufgaben!

Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.

Es sind maximal 108 Punkte erreichbar, 88 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 44 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).

Viel Erfolg!

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 20**

Erklärung

Vorname: ____________________ Name: ______________________________

Matrikelnummer: __________________

Beginn: ________________ Ende: ________________

Ich bestätige, dass ich diese Klausur ohne fremde Hilfe und ohne unerlaubte Hilfsmittel bearbeitet habe.

Datum, Unterschrift: ____________________________________

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 21**

Aufgabe 1 (5+3 = 8 Punkte)

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{n-1}{n} \qquad \forall\, n \geq 2\,.$$

b) Bestimmen Sie den Wert von $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)}$.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 22**

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3 - 5x^4 + x}{3x^4 - 7x}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 - 5x^4 + x}{3x^4 - 7x}$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(n - \sqrt{n^2 - 3n}\right)$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{3-5n}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - \sin(x^2)}{\big(1 - \cos(2x)\big)^3}$

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 23**

Aufgabe 3 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{21}{22}\right)^{n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{21} \binom{22}{n+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n!}$

d) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{21} \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{3^{\mu}}{22-\mu}$

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 24**

Aufgabe 4 (3+3+3+3 = 12 Punkte)

Sei $f(x) = \log(\log x)$ und sei $g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Berechnen Sie:

a) $f'(x)$

b) $g'(x)$

c) $\displaystyle\int_{-\mathrm{e}}^{-1} \frac{1+x^2}{x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x$

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 25**

Aufgabe 5 (4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen um x_0, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

a) $\dfrac{1}{5+10x} \quad \text{um} \quad x_0 = 0$

b) $\dfrac{1}{1-x^2} \cdot \dfrac{1}{5-x^2} \quad \text{um} \quad x_0 = 0$

c) $\sin x \quad \text{um} \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 26**

Aufgabe 6 (3+6 = 9 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^+ \to (1, \infty)$ definiert durch $f(x) = \mathrm{e}^x + \sin x$.

a) Zeigen Sie: f ist streng monoton wachsend.
b) Da f bijektiv ist, existiert eine Umkehrfunktion f^{-1}. Bestimmen Sie ${f^{-1}}'(1 + \mathrm{e}^{\pi/2})$.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 27**

Aufgabe 7 (5+3 = 8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{3 - x|x+1| - x^2}{|x+1|}\,.$$

a) Bestimmen Sie alle Asymptoten von f.

b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 28**

Aufgabe 8 (5+2+3 = 10 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie A^{-1}.
b) Bestimmen Sie $\det A$.
c) Bestimmen Sie alle X, die $XA = B$ lösen.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 29**

Aufgabe 9 (4+4 = 8 Punkte)

Sei $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad$ und $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $A\vec{x}$ und $A^2\vec{x}$.

b) Geben Sie $A^{2022}\vec{x}$ an (mit kurzer Begründung).

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 30**

Aufgabe 10 (10 Punkte)

Wir definieren auf $C([-1,1])$, dem Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-1,1]$, ein Skalarprodukt durch

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Die Funktionen $p_n \in C([-1,1])$, $n \in \mathbb{N}_0$, seien gegeben durch $p_n(x) = x^n$.

a) Berechnen Sie $\langle p_n, p_m\rangle$.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\operatorname{span}(p_0, p_1, p_2)$ (bezüglich des obigen Skalarprodukts).