Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 21/22

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Nachklausur am 21.04.2022

- ▶ Drucken Sie die Klausur aus (einseitig).
- ▶ Tragen Sie im Abschnitt *Erklärung* Vorname, Name und Matrikelnummer ein.
- ▶ Wenn Sie keinen Drucker benutzen können oder möchten, dann schreiben Sie den Abschnitt *Erklärung* ab, und schreiben Sie die Aufgabenstellungen (oder zumindest die Formeln daraus) ab – jede Aufgabe auf eine eigene Seite!
- ▶ Tragen Sie bei *Beginn* die aktuelle Uhrzeit ein.
- ▶ Bearbeiten Sie die Klausur. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- ▶ Beenden Sie nach spätestens 120 Minuten die Bearbeitung.
  Tragen Sie bei *Ende* die aktuelle Uhrzeit ein.
- ▶ Unterschreiben Sie den Abschnitt *Erklärung*.
- ▶ Scannen Sie die Erklärung. Scannen Sie Ihre Lösungen – je ein Dokument pro Aufgabe, auch unbearbeitete Aufgaben!
- ▶ Laden Sie die Erklärung wie angegeben hoch. Laden Sie Ihre Lösungen wie angegeben hoch – auch unbearbeitete Aufgaben!

Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.

Es sind maximal 108 Punkte erreichbar, 88 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 44 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).

Viel Erfolg!

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 40**

Erklärung

Vorname: ______________________ Name: ______________________________

Matrikelnummer: ____________________

Beginn: __________________ Ende: __________________

Ich bestätige, dass ich diese Klausur ohne fremde Hilfe und ohne unerlaubte Hilfsmittel bearbeitet habe.

Datum, Unterschrift: ____

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 41**

Aufgabe 1 (2+5 = 7 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und

$$\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n \quad \forall\, n \geq 0\,.$$

a) Berechnen Sie $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\vec{x}_n = \begin{pmatrix} 4^n - 6^n \\ 4^n + 6^n \end{pmatrix} \quad \forall\, n \geq 0\,.$$

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 42**

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^5 + 8x^3 - 4x^2}{4x^5 - 7x^4 + 2x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^5 + 8x^3 - 4x^2}{4x^5 - 7x^4 + 2x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^5 - 32}{8 - x^3}$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right)$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(\mathrm{e}^{2x} - 1)^4}{\cos(x^2) - 1}$

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 43**

Aufgabe 3 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{22} \binom{21}{n-1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\cos(n\pi)}$

d) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{21} \sum_{\mu=\nu}^{21} \frac{5^\mu}{\mu+1}$

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 44**

Aufgabe 4 (3+3+3+3 = 12 Punkte)

Sei $f(x) = \log(x^x)$ und $g(x) = \int_x^{x^2} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$. Berechnen Sie:

a) $f'(x)$

b) $g'(x)$

c) $\int_{-\mathrm{e}}^{-1} \frac{3+x^2}{x}\,\mathrm{d}x$

d) $\int_{\pi}^{2\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x$

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 45**

Aufgabe 5 (4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen um x_0, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

a) $\dfrac{1}{14+7x}$ um $x_0 = 0$

b) $\dfrac{1}{4-x^2} \cdot \dfrac{1}{9-x^2}$ um $x_0 = 0$

c) $\sin x$ um $x_0 = \pi$

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 46**

Aufgabe 6 (3+6 = 9 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^+ \to (2, \infty)$ definiert durch $f(x) = \mathrm{e}^x + \cos x$.

a) Zeigen Sie: f ist streng monoton wachsend.

b) Da f bijektiv ist, existiert eine Umkehrfunktion f^{-1}. Bestimmen Sie ${f^{-1}}'(\mathrm{e}^\pi - 1)$.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 47**

Aufgabe 7 (5+3 = 8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{x^2 + x|x-1| - 3}{|x-1|}\,.$$

a) Bestimmen Sie alle Asymptoten von f.

b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 48**

Aufgabe 8 (5+2+3 = 10 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie A^{-1}.

b) Bestimmen Sie $\det A$.

c) Bestimmen Sie alle X, die $XA = B$ lösen.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 49**

Aufgabe 9 (4+4 = 8 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $A\vec{x}$ und $A^2\vec{x}$.

b) Geben Sie $A^{2022}\vec{x}$ an (mit kurzer Begründung).

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 50**

Aufgabe 10 (2+3+3+3 = 11 Punkte)

Sei

$$g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \qquad \text{und} \qquad h(x) = \log\left[\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x\right].$$

a) Berechnen Sie $h(0)$ und $h(1)$.

b) Bestimmen Sie $g'(x)$.

c) Bestimmen Sie $h'(x)$.

d) Berechnen Sie $\lim_{x \to 1} \frac{h(x)}{1-x}$.