

ANALYSIS 2 ÜBUNGSBLATT 2

Aufgabe 6: Konturdiagramme (20 Punkte)

Bestimmen Sie, welche Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in (a)–(e) zu welchem Bild (I)–(V) gehört. (Keine Begründung erforderlich.)

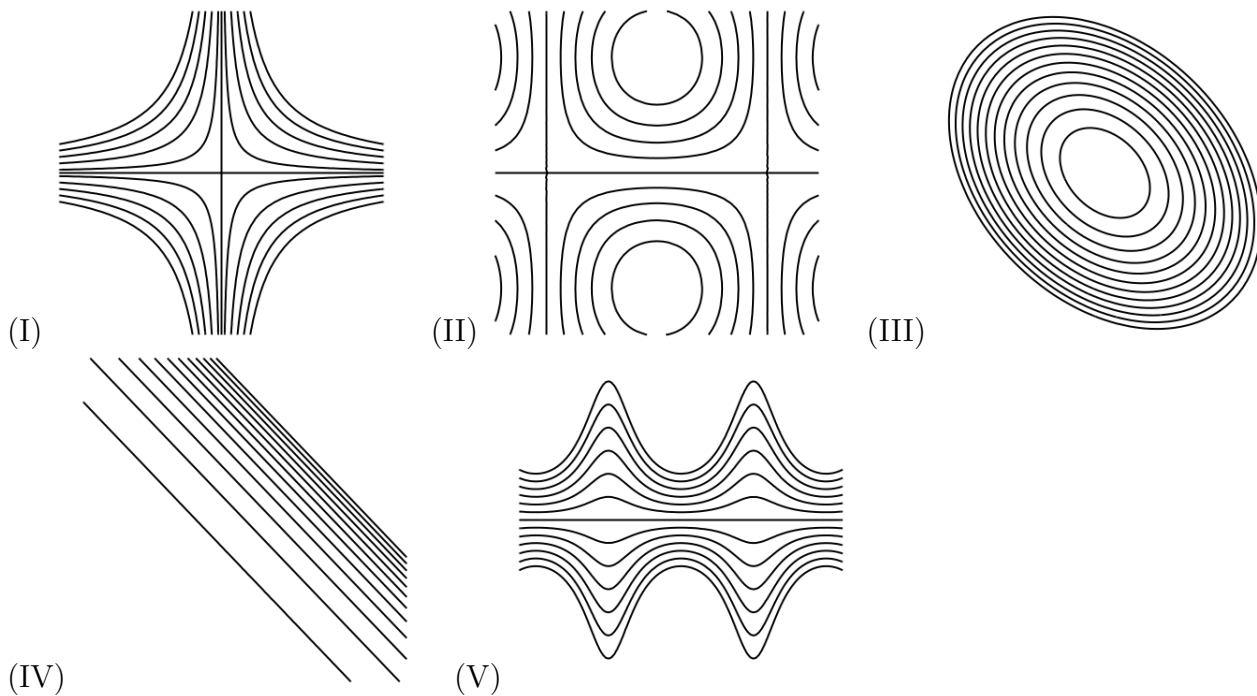
(a) $f(x, y) = xy$

(b) $f(x, y) = e^x e^y$

(c) $f(x, y) = \cos x \sin y$

(d) $f(x, y) = (2 + \cos x)y$

(e) $f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 + 2xy$



Aufgabe 7: Abstand von Mengen (20 Punkte)

Bestimmen Sie mit Beweis den Abstand der beiden Mengen $A = \{(2, 1, 1)\}$ und $B = \{(1, t, t^2) | t \in \mathbb{R}\}$ im \mathbb{R}^3 .

(Tipp: Da $x \mapsto \sqrt{x}$ eine streng wachsende Funktion auf $[0, \infty)$ ist, lässt sich das Problem, \sqrt{f} zu minimieren, dadurch lösen, dass man f minimiert.)

Aufgabe 8: Kugelkoordinaten (20 Punkte)

Ein Globus habe Radius 1, Mittelpunkt im Ursprung, Nordpol bei $(0, 0, 1)$ und nullten Längengrad in der xz -Ebene. Wir betrachten wir den Punkt P mit Längengrad $\varphi \in [-\pi, \pi)$ (westliche Länge positiv gerechnet, östliche negativ) und Breitengrad $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (nördliche Breite positiv gerechnet, südliche negativ). Bestimmen Sie die Koordinaten (x, y, z) von P und begründen Sie Ihre Antwort geometrisch.

Aufgabe 9: Polynome in mehreren Variablen (20 Punkte)

- (a) Das allgemeine Polynom ersten Grades in zwei Variablen x, y lautet $a + bx + cy$. Geben Sie explizit das allgemeine Polynom $p_4(x, y)$ vierten Grades an.
- (b) Bestimmen Sie $\frac{\partial p_4}{\partial x}$, $\frac{\partial p_4}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 p_4}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 p_4}{\partial y \partial x}$.
- (c) Das allgemeine Polynom vom Grad d in n Variablen kann man schreiben als

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n \\ \sum \alpha_i \leq d}} c_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Bestimmen Sie $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Aufgabe 10: Kurvenlänge (20 Punkte)

Seien $r, h > 0$. Die Kurve $x(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)$ nennt man Helix oder Schraubenlinie (auch Korkenzieherkurve oder Wendeltreppenkurve).

- (a) Zeichnen Sie drei Windungen der Kurve (für geeignete r, h).
- (b) Berechnen Sie die Länge einer Windung.

Englisch-Vokabeln (freiwillig): Polynom = polynomial, homogen = homogeneous, Euklidisch = Euclidean, Norm = norm, Durchmesser = diameter, Punktprodukt = dot product, rotations-symmetrisch = rotationally symmetric, gerade Funktion = even function, ungerade Funktion = odd function, partielle Ableitung = partial derivative, Limes (Grenzwert) = limit, maximieren = maximize, Gradient = gradient [gräjdient], Richtungsableitung = directional derivative, Kurvenlänge = curve length, Flächenintegral = area integral, signiertes Volumen = signed volume, Mittelwert = mean value, Polarkoordinaten = polar coordinates, Kugelkoordinaten = spherical coordinates.

Abgabe: Bis Montag 31.10.2022 um 12:00 Uhr