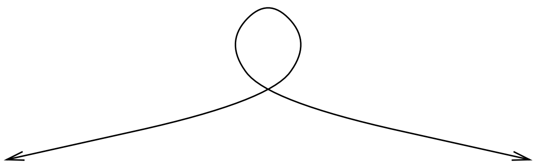
Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

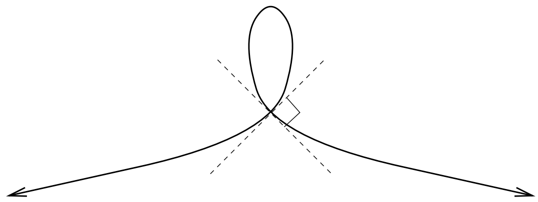
Wintersemester 2022
25. Oktober 2022

Analysis 2 Übungsblatt 3

Aufgabe 11: Richtung von Kurven (20 Punkte)

Für jede positive Zahl A betrachten wir die parametrisierte Kurve $\big(x(t), y(t)\big) = \big(t^3 - t, A/(1+t^2)\big)$. Sie sieht so aus wie in Figur (a). Für einen bestimmten Wert von A ist die "Selbst-Kreuzung" rechtwinklig. Das Bild sieht dann so aus wie in Figur (b). Finden Sie diesen Wert.

(a) 

(b) 

Aufgabe 12: Normen (20 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass auf dem $\mathbb{R}^n$ die Euklidische Norm

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$$

eine Norm definiert. Verwenden Sie dabei ohne Beweis die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\big|\langle x, y\rangle\big| \leq \|x\|_2 \, \|y\|_2$$

für das Skalarprodukt $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

(b) Zeigen Sie, dass auch jede der beiden folgenden Vorschriften eine Norm definiert:

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i| \,, \qquad \|x\|_\infty := \max\big\{|x_i| : i \in \{1, \ldots, n\}\big\}\,.$$

(c) Zeichnen Sie im $\mathbb{R}^2$ den "Einheitskreis" $\big\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\big\}$ bezüglich jeder der drei erwähnten Normen (alle drei in dasselbe Diagramm).

Aufgabe 13: Konvergenz in metrischen Räumen (20 Punkte)

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie: Eine Folge (x_n) in X konvergiert genau dann gegen $a \in X$ (gemäß Definition 1.22 aus der Vorlesung), wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \; d(x_n, a) < \varepsilon.$$

(b) Sei $\mathbb{R}^n$ versehen mit der euklidischen Metrik. Zeigen Sie: Eine Folge (x_ν) in $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}^n$, wenn jede Komponentenfolge $(x_{\nu,j})$ in $\mathbb{R}$ gegen a_j konvergiert, also

$$\lim_{\nu\to\infty} x_{\nu,j} = a_j \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n.$$

Aufgabe 14: Richtungsableitung von Polynomen (20 Punkte)

Wir betrachten wieder, wie in Aufgabe 9 auf Blatt 2, das allgemeine Polynom vom Grad d in n Variablen, $p(x_1, \ldots, x_n)$. Sei $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ein fester Vektor. Die Richtungsableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ in Richtung v ist definiert als

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\xi) = \frac{d}{dt} f(\xi + vt)\Big|_{t=0} .$$

Zeigen Sie unter Benutzung von Sätzen aus der Analysis 1, dass für alle Polynome p und alle $\xi, v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\frac{\partial p}{\partial v}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial p}{\partial x_i}(\xi) .$$

Aufgabe 15: Inneres und Rand (20 Punkte)

Zeigen Sie ausgehend von Definition 1.19 aus der Vorlesung:

(a) $\overset{\circ}{Y}$ ist die Menge der inneren Punkte von Y.

(b) Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann Randpunkt von $Y \subset X$, wenn jede Umgebung von x sowohl einen Punkt aus Y als auch einen Punkt aus $X \backslash Y$ enthält.

(c) Bestimmen Sie das Innere und den Rand von

$$M := [0, 1] \backslash \left\{ \tfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Englisch-Vokabeln (freiwillig): Metrik = metric, metrischer Raum = metric space, Dreiecks-Ungleichung = triangle inequality, induziert = induced, Isometrie = isometry, normierter Raum = normed space, Umgebung = neighborhood, offen = open, abgeschlossen = closed, innerer Punkt = interior point, das Innere = the interior, der Abschluss = the closure, Rand = boundary, topologischer Raum = topological space, vollständig = complete, folgenstetig = sequentially continuous, Urbild = pre-image, beschränkt = bounded, Schranke = bound.

Abgabe: Bis Freitag 4.11.2022 um 16:00 Uhr