Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2022
1. November 2022

Analysis 2 Übungsblatt 4

Aufgabe 16: Greensche Funktionen (25 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \log \sqrt{x^2+y^2}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $n > 2$, gegeben durch $f(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{-\alpha}$. Bestimmen Sie α so, dass

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = 0.$$

Bemerkung: Die Lösung der Gleichung $\Delta f = \delta$ im $\mathbb{R}^n$ heißt Greensche Funktion des Laplace-Operators $\Delta = \sum_j \partial^2/\partial x_j^2$ im $\mathbb{R}^n$. Hier ist δ die Diracsche Delta-Distribution am Ursprung. Sie haben in der Aufgabe allerdings nur gezeigt, dass f die Gleichung $\Delta f = 0$ außerhalb des Ursprungs erfüllt.

Aufgabe 17: Brennpunkt einer Parabel (25 Punkte)

Wir wollen zeigen, dass die Parabel $y = x^2$ einen Brennpunkt bei $F = (0, 1/4)$ hat. Das heißt, dass alle Lichtstrahlen, die von oben in $-y$-Richtung einfallen und an der Parabel reflektiert werden gemäß "Einfallswinkel = Ausfallswinkel", durch F laufen. Gehen Sie so vor:

(a) Geben Sie für jeden Punkt $P = (x, x^2)$ der Parabel einen Vektor $\underline{t} \neq \underline{0}$ in Richtung der Tangente in P an und einen Vektor $\underline{n} \neq \underline{0}$ in Richtung der Normalen (Senkrechten).

(b) Berechnen Sie $\cos\alpha$ für den Einfallswinkel α bei P sowie $\cos\beta$ für den Winkel β zwischen $\underline{n}$ und der Strecke PF.

(c) Zeigen Sie, dass $\alpha = \beta$ für alle P.

Aufgabe 18: Konvexe Mengen (50 Punkte)

Eine Teilmenge K des $\mathbb{R}$-Vektorraumes V heißt *konvex*, wenn für je zwei Punkte $x, y \in K$ auch die Verbindungsstrecke in K liegt, d.h. $\forall t \in [0,1]: \; tx + (1-t)y \in K$.

(a) Zeigen Sie: Ist $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, so ist für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und jedes $r > 0$ die bezüglich dieser Norm gebildetet Kugel $B_r(x)$ konvex.

(b) Zeigen Sie: Ist $K \subset V$ konvex, sind $x_1, \ldots, x_k \in K$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$ mit $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$, so liegt $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \in K$. Eine solche Linearkombination nennt man eine *Konvexkombination.*

(c) Zeigen Sie: Der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen ist konvex.

(d) Für jede Teilmenge $M \subset V$ sei $H(M)$ der Durchschnitt aller konvexen Mengen K, die M als Teilmenge enthalten. Zeigen Sie: $H(M)$ ist konvex. Sie heißt die *konvexe Hülle* von M.

(e) Sei $K(M)$ die Menge aller Konvexkombinationen von Elementen von M. Zeigen Sie: $H(M) = K(M)$.

(f) Zeigen Sie: Der Abschluss $\overline{K}$ einer konvexen Menge K in einem normierten Raum V ist konvex.

(g) Die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn die Menge oberhalb ihres Graphen in $\mathbb{R}^2$, $K = \{(x,y) \in (a,b) \times \mathbb{R} | f(x) \leq y\}$, konvex ist. Zeigen Sie: f ist genau dann konvex, wenn für alle $x, z \in (a,b)$ und alle $t \in [0,1]$ gilt

$$f\big(tx + (1-t)z\big) \leq tf(x) + (1-t)f(z)\,. \tag{1}$$

(h) Für alle $x < y$ aus (a,b) sei

$$s(x,y) := \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

die Sekantensteigung von f zwischen x und y. Zeigen Sie: f ist genau dann konvex, wenn für alle $x < y < z$ aus (a,b) gilt $s(x,y) \leq s(y,z)$.

(i) Zeigen Sie, dass für differenzierbares f gilt: f ist genau dann konvex, wenn f' auf (a,b) monoton wächst. (*Tipp*: Mittelwertsatz der Differenzialrechnung in $\mathbb{R}$.)

Englisch-Vokabeln (freiwillig): konvex = convex, gleichmäßige Konvergenz = uniform convergence, punktweise = pointwise, Häufungspunkt = accumulation point, Cauchyfolge = Cauchy sequence, Supremumsnorm = sup [ßuup] norm, Beweis durch Widerspruch = proof by contradiction, größer als = greater than, kleiner als = less than, größer-gleich = greater or equal, kleiner-gleich = less or equal, injektiv = one-to-one oder injective, surjektiv = onto oder surjective, bijektiv = bijective, Quotient oder Verhältnis = quotient oder ratio, Potenz = power, a hoch b = a to the b-th power oder a to the b, x-Quadrat = x squared, x hoch 3 = x cubed, Größe = quantity.

Abgabe: Bis Freitag 11.11.2022 um 16:00 Uhr