Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2022
8. November 2022

Analysis 2 Übungsblatt 5

Aufgabe 19: Lipschitz-stetige Funktionen auf metrischen Räumen (20 Punkte)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt Lipschitz-stetig, falls es ein $L \in [0, \infty)$ gibt, so dass

$$d_Y(f(a), f(b)) \leq L\, d_X(a, b) \qquad \text{für alle } a, b \in X\,.$$

Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion stetig ist.

Aufgabe 20: Der Abstand zu einer Menge (30 Punkte)

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Für jede Teilmenge $T \subset X$ definieren wir die Abbildung

$$d_T : X \to \mathbb{R}, \quad d_T(x) := \inf\{d(x, y) \,|\, y \in T\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{T} = \{x \,|\, d_T(x) = 0\}$.

(b) Zeigen Sie, dass d_T stetig ist.

Aufgabe 21: Stetige Funktionen auf dem $\mathbb{R}^2$ (30 Punkte)

Entscheiden Sie (mit Beweis), welche der folgenden Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig sind und welche nicht.

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,, \end{cases} \qquad g(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

$$h(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Aufgabe 22: Zum Banachschen Fixpunktsatz (20 Punkte)

(a) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $\phi : X \to X$ eine Kontraktion mit Lipschitz-Konstante $\theta < 1$, $x_0 \in X$ und $a := \lim_{n\to\infty} x_n$ der Limes der zugehörigen Iterationsfolge

$$x_{n+1} := \phi(x_n)\,.$$

Zeigen Sie, dass $d(x_n, a) \leq \theta^n d(x_0, a)$.

(b) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall und $\phi : I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass ϕ Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante $L = \|\phi'\|_\infty$. (Insbesondere ist ϕ also eine Kontraktion, wenn $\|\phi'\|_\infty < 1$ und $\phi(I) \subset I$ ist.)

Hinweis: Erster Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung.

Englisch-Vokabeln (freiwillig): konjugiert komplex = complex conjugate, a_n geht gegen a = a_n tends to a, konvergieren = to converge, divergieren = to diverge, Logarithmus = logarithm, Grad (eines Polynoms) = degree, Homöomorphismus = homeomorphism, Betrag = absolute value oder modulus, Einheitskreis = unit circle, Kreisbogen = (circular) arc, Fixpunkt = fixed point, Kontraktion = contraction, ohne Beschränkung der Allgemeinheit = without loss of generality, Bedingung = condition, Kriterium = criterion [kraitirien], hinreichend = sufficient, notwendig = necessary, äquivalent = equivalent.

Abgabe: Bis Freitag 18.11.2022 um 16:00 Uhr