Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2022
15. November 2022

Analysis 2 Übungsblatt 6

Aufgabe 23: Newton-Verfahren und Banachscher Fixpunktsatz (50 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Machen Sie sich klar, dass

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \phi(x)\,.$$

Es ist also a genau dann Nullstelle von f, wenn a Fixpunkt von ϕ ist. Das Newton-Verfahren besteht nun darin, die Nullstellen von f durch Iterationsfolgen $x_{n+1} = \phi(x_n)$ zu approximieren.

(a) Überlegen Sie sich zunächst geometrisch anhand einer Zeichnung, warum zu erwarten ist, dass die Folge (x_n) gegen eine Nullstelle von f konvergiert, falls der Startwert x_0 hinreichend nahe an einer Nullstelle liegt.

Nun nehmen wir zusätzlich an, dass f bei a im Innern von I eine Nullstelle hat, also $f(a) = 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 22(b), dass, wenn man $\delta_0 > 0$ klein genug wählt, dann $I_0 := [a-\delta_0, a+\delta_0] \subset I$ und $\phi\big|_{I_0}$ eine Kontraktion ist, also $\phi(I_0) \subset I_0$ und $|\phi(x)-\phi(y)| \leq \theta_0|x - y|$ für ein $0 < \theta_0 < 1$ und alle $x, y \in I_0$ gilt.

Zwischenergebnis: Man kann $\theta_0 = K\delta_0$ wählen, wobei $K = \frac{c_1 c_2}{c_3}$ mit $c_1 = \sup_{x\in I} |f'(x)|$, $c_2 = \sup_{x\in I} |f''(x)|$ und $c_3 = \inf_{x\in I} |f'(x)|^2$.

Insbesondere konvergiert also das Newton-Verfahren für jeden Startwert $x_0 \in I_0$ gegen die Nullstelle a, d.h. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ für die Iterationsfolge $x_{n+1} = \phi(x_n)$.

(c) Geben Sie eine Schranke für den Fehler im n-ten Schritt an, also ein $S_n < \infty$ so, dass $|x_n - a| \leq S_n$ und $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$. *Hinweis:* Aufgabe 22(a).

(d) Verbessern Sie die Schranke aus (c) (d.h. finden Sie eine kleinere Schranke s_n), indem Sie die Newton-Iteration auf einer Folge von geeigneten Intervallen $I_n := [a - \delta_n, a + \delta_n]$ betrachten und jeweils auch θ_n neu abschätzen.

Ergebnis: Es gilt $|x_n - a| \leq \theta_0^{2^n-1}\,|x_0 - a|$.

(e) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$, $I = [1, 2]$. Geben Sie für den Startwert $x_0 = \frac{3}{2}$ unter Verwendung von Teil (d) und $\delta_0 = 1/10$ eine explizite Schranke an den Fehler $|x_n - \sqrt{2}|$ im n-ten Schritt an. Wieviele Schritte sind also nötig, um 100 Nachkommastellen von $\sqrt{2}$ korrekt zu berechnen?

Aufgabe 24: Die Einheitskugel in normierten Räumen (25 Punkte)

Der Satz von Heine-Borel aus der Vorlesung besagt insbesondere, dass die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B}_1(0) := \{v \in V \mid \|v\| \leq 1\}$ in einem endlichdimensionalen normierten Raum V kompakt ist. Tatsächlich kann man auch die Umkehrung zeigen: ist die Einheitskugel in einem normierten Raum kompakt, so hat der Raum endliche Dimension. Wir werden in dieser Aufgabe ein Beispiel eines unendlichdimensionalen normierten Raumes kennenlernen, dessen Einheitskugel nicht kompakt ist.

Sei $\ell^2_{\mathbb{R}} := \{(x_n) \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$ der Raum der quadratsummierbaren reellen Folgen mit der Norm $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$ für $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2_{\mathbb{R}}$. Wir stellen uns hier also geometrisch den unendlichdimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^\infty$ vor. Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B}_1(0)$ in $(\ell^2_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|_2)$ nicht kompakt ist. (*Hinweis:* Finden Sie eine Folge in $\overline{B}_1(0)$, die keinen Häufungspunkt hat, und argumentieren Sie mit Bolzano-Weierstraß.)

Aufgabe 25: 1-Norm (25 Punkte)

Sei $V = C([a, b], \mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[a, b]$ und

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx\,.$$

(a) Ist die Norm $\|\cdot\|_1$ äquivalent zur Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$? (Mit Beweis)

(b) Bezüglich welcher der beiden Normen ist $\int_a^b$ (d.h. die Abbildung $C([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_a^b f(x)\, dx$) stetig? (Mit Beweis)

Englisch-Vokabeln (freiwillig): Einheitskugel = unit ball, offene Überdeckung = open cover, Teilüberdeckung = subcover, Sinus = sine [ßain], Cosinus = cosine, Tangens = tangent, Kotangens = cotangent, gerade Funktion = even function, ungerade Funktion = odd function, wohldefiniert = well defined, genau dann wenn = if and only if, (weg-)zusammenhängend = (pathwise) connected.

Abgabe: Bis Freitag 25.11.2022 um 16:00 Uhr