Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2022
22. November 2022

Analysis 2 Übungsblatt 7

Aufgabe 26: Satz von Schwarz (20 Punkte)

Die Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ habe partielle Ableitungen der Form

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + g(y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3x. \tag{1}$$

Hierbei sei g eine differenzierbare Funktion (die nur von y abhängt).

(a) Bestimmen Sie g bis auf Addition einer Konstante.

(b) Bestimmen Sie (mit Begründung) alle Funktionen $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit partiellen Ableitungen der Form (1).

Aufgabe 27: Differenzierbarkeit (30 Punkte)

Sei E eine Euklidische Ebene. Eine Funktion $U : E \to \mathbb{R}$ lässt sich in Cartesischen Koordinaten als $u(x, y)$ oder in Polarkoordinaten als $\tilde{u}(r, \varphi)$ ausdrücken.

(a) Drücken Sie $u(x, y) = x/\sqrt{x^2 + y^2}$, definiert für $(x, y) \neq (0, 0)$, in Polarkoordinaten aus, zeichnen Sie das Konturdiagramm, und zeigen Sie, dass u sich nicht stetig in $(0, 0)$ fortsetzen lässt.

(b) Wie lauten affin-lineare Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in Polarkoordinaten?

Wir betrachten nun Funktionen der Form $\tilde{u}(r, \varphi) = r\, g(\varphi)$, wobei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch ist.

(c) Wann (d.h. unter welcher Bedingung an g) ist u im Ursprung partiell differenzierbar?

(d) Wann existiert die Richtungsableitung von u im Ursprung in Richtung $(\cos\varphi, \sin\varphi)$? Wie lautet sie dann?

(e) Wann ist u im Ursprung total differenzierbar? (*Tipp*: Wenn u total differenzierbar ist, wie hängt dann die Richtungsableitung in Richtung $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ von φ ab?)

(f) Geben Sie ein Beispiel für g und damit auch u, für das alle Richtungsableitungen von u existieren, u aber nicht total differenzierbar ist.

Aufgabe 28: Laplace-Operator (25 Punkte)

(a) Seien nochmal $u(x, y)$ und $\tilde{u}(r, \varphi)$ die Darstellungen derselben Funktion $U : E \to \mathbb{R}$ in Cartesischen und Polarkoordinaten. Drücken Sie $\partial_r \tilde{u}$ und $\partial_\varphi \tilde{u}$ durch $\partial_x u$ und $\partial_y u$ (ausgewertet bei $(x, y) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi)$) aus.

(b) Ebenso für $\partial_r^2 \tilde{u}$ und $\partial_\varphi^2 \tilde{u}$.

(c) Zeigen Sie, dass sich Δu auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ wie folgt in Polarkoordinaten ausdrücken lässt:

$$\widetilde{\Delta u} = \partial_r^2 \tilde{u} + \frac{1}{r} \partial_r \tilde{u} + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 \tilde{u}\,.$$

Aufgabe 29: Newtonsche Mechanik (25 Punkte)

Die Newtonsche Mechanik ist eine physikalische Theorie, die besagt, dass das Universum aus N Materiepunkten (genannt Teilchen) besteht, die sich im Laufe der Zeit in einem 3-dimensionalen Euklidischen Raum bewegen (in dem wir ein Cartesisches Koordinatensystem einführen). Dabei gehorcht die Position $\boldsymbol{q}_k(t) \in \mathbb{R}^3$ des k-ten Teilchens zur Zeit t der Bewegungsgleichung

$$m_k \frac{d^2 \boldsymbol{q}_k}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} G m_j m_k \frac{\boldsymbol{q}_j - \boldsymbol{q}_k}{\|\boldsymbol{q}_j - \boldsymbol{q}_k\|^3} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} \frac{e_j e_k}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{q}_j - \boldsymbol{q}_k}{\|\boldsymbol{q}_j - \boldsymbol{q}_k\|^3}\,. \tag{2}$$

Hierbei ist $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm in $\mathbb{R}^3$, G und ε_0 sind Naturkonstanten und $m_k > 0$, e_k Konstanten, genannt die Masse und die elektrische Ladung des k-ten Teilchens. Die *Energie* des Universums zur Zeit t ist definiert als

$$E(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{2} \left\| \frac{d\boldsymbol{q}_k}{dt} \right\|^2 - \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{N} \left(G m_j m_k - \frac{e_j e_k}{4\pi\varepsilon_0} \right) \frac{1}{\|\boldsymbol{q}_j - \boldsymbol{q}_k\|}\,. \tag{3}$$

(a) Berechnen Sie $\dfrac{d}{dt} \left\| \dfrac{d\boldsymbol{q}_k}{dt} \right\|^2$ und $\dfrac{d}{dt} \dfrac{1}{\|\boldsymbol{q}_j - \boldsymbol{q}_k\|}$.

(b) Wir setzen zur Abkürzung $c_{jk} := G m_j m_k - e_j e_k / 4\pi\varepsilon_0$. Zeigen Sie: E ist eine Erhaltungsgröße, d.h. zeitunabhängig.

Englisch-Vokabeln (freiwillig): Divergenz = divergence, Laplace-Operator = Laplacian operator, Rotation = curl, Hesse-Matrix = Hessian matrix, total differenzierbar = totally differentiable, Mittelwertsatz = mean value theorem, Taylor-Entwicklung = Taylor expansion.

Abgabe: Bis Freitag 2.12.2022 um 16:00 Uhr