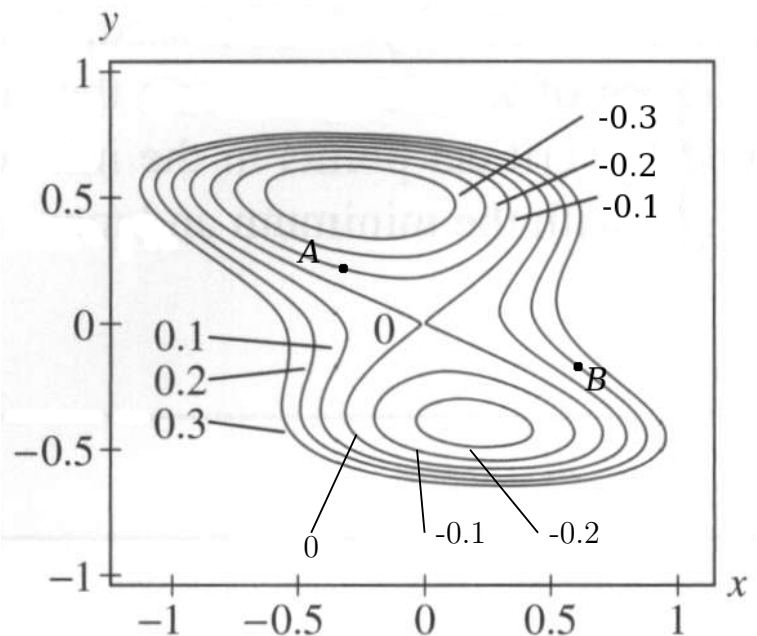


ANALYSIS 2 ÜBUNGSBLATT 8

Aufgabe 30: Konturdiagramm (15 Punkte)

Gezeigt ist ein Konturdiagramm einer Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Die Figur kann auch separat von der Webseite heruntergeladen werden.

- Zeichnen Sie ∇f bei A und B ein (qualitativ).
- Markieren Sie die drei Punkte, an denen $\nabla f = 0$, und nennen Sie sie P, Q, R . (Suchen Sie selbst aus, welchem der drei Punkte Sie welchen Namen geben.) Nicht alle diese Punkte sind durch die Figur genau festgelegt; machen Sie eine plausible Schätzung über die Lage der Punkte.
- Welche der Punkte P, Q, R sind: lokale Maxima? Lokale Minima? Sattelpunkte? (Keine Begründung erforderlich.)



Aufgabe 31: Niveaufläche (15 Punkte)

Die Funktion $F(x, y, z) = \sin(2\pi x)e^{yz} + x\sqrt{z/y}$ ist zumindest auf $(0, \infty)^3 \subset \mathbb{R}^3$ definiert. Man finde die Tangentialebene im \mathbb{R}^3 an die Fläche $F(x, y, z) = 1$ im Punkt $(x, y, z) = (1, 2, 2)$ und gebe sie in der Form $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ mit Konstanten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ an.

(Hinweis: In einer Vorlesung betrachteten wir Tangentialebenen an den Graphen einer Funktion $f(x, y)$, aber hier ist die Fläche nicht als Graph einer Funktion gegeben, daher ist die dort beschriebene Vorgehensweise hier nicht anwendbar. *Tipp:* ∇F steht senkrecht auf der Fläche.)

Aufgabe 32: Taylorpolynome (20 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorpolynome der folgenden Funktionen bis zur zweiten Ordnung um den jeweils angegebenen Punkt:

- $f(x, y) = e^{-x^2+y}$ um den Punkt $(0, 0)$.
- $g(x, y) = 4x^2 \log(1+x+y) - y^2$ um $(0, 0)$.
- $h(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ um $(1, 1)$.
- $k(x, y, z) = x^2 + 4xy - 3y^2 + y + 2xz + 3z - 4$ um $(1, 3, -1)$.

Aufgabe 33: Taylorreihe (25 Punkte)

Bestimmen Sie bis hin zu beliebiger Ordnung n das Taylorpolynom $P_{f,(0,0)}^{(n)}$ für $f : (-1, 1)^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)}.$$

Für welche Werte von (x, y) konvergiert die Taylorreihe gegen f , gilt also $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{f,(0,0)}^{(n)}(x, y) = f(x, y)$?

Aufgabe 34: Lokale Extrema (25 Punkte)

Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = (4x^2 + y^2)e^{-x^2 - 4y^2}.$$

Abgabe: Bis Freitag 9.12.2022 um 16:00 Uhr