Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2022
6. Dezember 2022

Analysis 2 Übungsblatt 9

Aufgabe 35: Schwerpunkt (20 Punkte)

Im $\mathbb{R}^n$ seien k Punkte $a_1, \ldots, a_k$ gegeben, und $\|\cdot\|$ bezeichne die Euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Summe der Abstandsquadrate $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} \|x - a_j\|^2 ,$$

ein Minimum im "Schwerpunkt" $\xi := \dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_j$ besitzt.

Aufgabe 36: Wellengleichung (30 Punkte)

Die *Wellengleichung* in einer Raumdimension ist die partielle Differenzialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{1}$$

für eine unbekannte Funktion $f(x,t)$. Hierbei ist $c > 0$ eine Konstante, genannt die Ausbreitungsgeschwindigkeit.

(a) Zeigen Sie, dass $f(x,t) = G(x - ct) + H(x + ct)$ eine Lösung von (1) ist für beliebige Funktionen $G, H \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Wir zeigen nun, dass alle Lösungen $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ von (1) von der Form wie in Teil (a) sind. Zur Vereinfachung setzen wir ab jetzt $c = 1$. Wir führen dazu folgende Koordinaten ein:

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} x - \tfrac{1}{\sqrt{2}} t \\ v &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} x + \tfrac{1}{\sqrt{2}} t \, . \end{aligned}$$

(b) Zeichnen Sie in dasselbe Diagramm die Koordinatenlinien für beide Koordinatensysteme ein. Formulieren Sie in Worten die geometrische Beziehung zwischen den beiden Koordinatensystemen.

(c) Drücken Sie (x,t) durch (u,v) aus. Bestimmen Sie die Darstellung $\tilde{f}(u,v)$ einer beliebigen Funktion $f(x,t)$ in den neuen Koordinaten. Drücken Sie nun insbesondere die Lösungen f aus Teil (a) als Funktionen von u und v aus ($c = 1$).

(d) Zeigen Sie, dass (1) äquivalent ist zu

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u \, \partial v} = 0 \, . \tag{2}$$

(e) Zeigen Sie, dass jede Lösung $\tilde{f} \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ von (2) von der Form $\tilde{f}(u,v) = G\big(\sqrt{2}u\big) + H\big(\sqrt{2}v\big)$ ist mit $G, H \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Aufgabe 37: Extrema von Querschnitten (25 Punkte)

Sei $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$. Zeigen Sie: f hat kein lokales Minimum bei $(0,0)$, hat aber auf jeder Geraden durch $(0,0)$ ein lokales Minimum in $(0,0)$.

Aufgabe 38: Implizite Funktion (25 Punkte)

Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto F(x,y) = y^3 + y - x^4 + x^2$. Der Satz über implizite Funktionen garantiert, dass offene Umgebungen $U, V \subset \mathbb{R}$ von 0 und eine eindeutige Abbildung $g : U \to V$ existieren, so dass $F(x, g(x)) = 0$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom $P^{(2)}_{g,0}$ zweiter Ordnung von g in 0.

Abgabe: Bis Freitag 16.12.2022 um 16:00 Uhr