Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2022
10. Januar 2023

Analysis 2 Übungsblatt 11

Aufgabe 43: Reihenfolge (20 Punkte)

Sei $f(y) = \min(1, \ln(1/y))$. Zeichnen Sie den Integrationsbereich im $\mathbb{R}^2$ des Integrals

$$\int_0^1 \left(\int_0^{f(y)} xy \; dx \right) dy$$

und berechnen Sie seinen Wert in *beiden* Integrationsreihenfolgen. (*Erinnerung*: In der umgekehrten Reihenfolge lauten die Grenzen anders.)

Aufgabe 44: Integration in Kugelkoordinaten (24 Punkte)

Sei $X = (0,\infty) \times (0,\pi) \times (-\pi,\pi) \subset \mathbb{R}^3$; dann ist $\Phi : X \to \Phi(X) \subset \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \big(r\sin\theta\cos\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\theta\big) =: \big(x(r,\theta,\varphi), y(r,\theta,\varphi), z(r,\theta,\varphi)\big)$$

ein Diffeomorphismus und beschreibt Kugelkoordinaten auf dem $\mathbb{R}^3$. Sei ferner $B := \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitskugel.

(a) Leiten Sie aus der allgemeinen Transformationsformel den Ausdruck für $\int_B f(x,y,z)\, d(x,y,z)$ in Kugelkoordinaten her.

(b) Stellen Sie die Funktion $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = 1$ in Kugelkoordinaten dar und berechnen Sie mit Hilfe von Teil (a) $\int_B f(x,y,z)\, d(x,y,z)$.

(c) Dasselbe mit $(x,y,z) \mapsto g(x,y,z) = x^2 + y^2$.

Aufgabe 45: Separation der Variablen (16 Punkte)

Lösen Sie jeweils das Anfangswertproblem $\quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad$ für

(a) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t,x) = tx$

(b) $f : \mathbb{R} \times (0,\pi) \to \mathbb{R}$, $f(t,x) = \dfrac{t^2}{\sin x}$.

Aufgabe 46: Eindeutigkeit von Lösungen? (20 Punkte)

Sei $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $v(x) = \sqrt{|x|}$. Bestimmen Sie mehrere Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $\dot{x} = v(x)$ zum Anfangswert $x(0) = -1$ und skizzieren Sie einige davon in einem Raum-Zeit-Diagramm.

Aufgabe 47: Populationsmodell (20 Punkte)

Für die Größe $P(t)$ einer Fischpopulation in einem See nach t Jahren nehmen wir folgendes Modell an:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P - \beta P^2$$

with $\alpha = 4/\text{Jahr}$ und $\beta = 10^{-2}/\text{Jahr}$. (Der erste Term kann z.B. daher kommen, dass mehr Fische auch mehr Nachkommen haben, der zweite daher, dass zu viele Fische sich gegenseitig Ressourcen wie Nahrung wegnehmen werden.)

(a) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen und ermitteln sie, welche stabil, instabil oder halbstabil sind. Welche Gleichgewichtsgröße der Population wird sich einstellen?

(b) Es soll das Angeln erlaubt werden, und es stellt sich die Frage, wieviele Anglerlizenzen erteilt werden sollen. Nehmen Sie an, dass ein durchschnittlicher Angler 5 Fische pro Jahr fängt. Stellen Sie die modifizierte ODE auf für die Situation, dass L Lizenzen vergeben werden, und bestimmen Sie die Gleichgewichtsgröße der Population. Unter welchem Wert muss L liegen, damit die Population nicht ausstirbt?

Abgabe: Bis Freitag 20.1.2023 um 16:00 Uhr