Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2022
17. Januar 2023

# Analysis 2 Übungsblatt 12

**Aufgabe 48: Stetige Verzinsung** (25 Punkte)

Alfred möchte ein Haus kaufen und braucht dafür ein Darlehen von einer Bank; er kann sich monatliche Zahlungen von 1000 Euro leisten. Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass Zinsen kontinuierlich anfallen mit der Rate $r = 0.05/\text{Jahr}$, und dass Alfred seine Zahlungen kontinuierlich leistet.

(a) Stellen Sie eine ODE auf für die von Alfred an die Bank geschuldete Summe $x(t)$ nach $t$ Jahren.

(b) Lösen Sie die ODE für $x(0) = M$.

(c) Bestimmen Sie die maximale Darlehenssumme $M$, die Alfred zu leihen sich leisten kann, wenn die Laufzeit des Darlehens 20 Jahre betragen soll.

**Aufgabe 49: Potenzreihenansatz** (25 Punkte)

Benutzen Sie den Ansatz $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$, um Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Gleichung $\dot{x} = -tx$ zu bestimmen. Warum konvergieren die so erhaltenen Reihen für alle $t \in \mathbb{R}$?

**Aufgabe 50: Auseinanderlaufen von Lösungen** (25 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v : G \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit Konstante $L > 0$. Die Funktionen $x, \tilde{x} : (-\delta, \delta) \to G$ seien beide Lösungen der DGL $\dot{x} = v(x)$, aber mit unterschiedlichen Anfangswerten $x(0) = x_0$ und $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$. Zeigen Sie, dass für alle $t \in [0, \delta)$ gilt

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \|x_0 - \tilde{x}_0\| e^{Lt} \,. \tag{1}$$

(Tatsächlich gilt (1) mit $e^{L|t|}$ statt $e^{Lt}$ auch für $-\delta < t < 0$, aber das ist für die Aufgabe nicht verlangt.)
*Hinweis*: Zeigen Sie (1) zunächst für die Approximationen $\varphi_k = \Phi[\varphi_{k-1}]$, $\varphi_0(t) = x_0 \ \forall t$ und $\tilde{\varphi}_k$.

**Aufgabe 51: Exponentialansatz** (25 Punkte)

Die allgemeine lineare DGL vom Grad $m$ in 1d mit konstanten Koeffizienten lautet

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \frac{d^k x}{dt^k} = g(t) \,, \tag{2}$$

wobei die nullte Ableitung $d^0x/dt^0 = x(t)$ sein soll, $a_m \neq 0$ und $g$ eine gegebene Funktion. Wir erlauben, dass $x$ und $g$ komplex-wertig sind (aber von einer reellen Variablen abhängen), $x, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, und die Koeffizienten $a_k$ ebenfalls komplex sind. Die Funktion

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k$$

heißt das *charakteristische Polynom* der DGL (2). Man schreibt für (2) auch $P(\frac{d}{dt})x(t) = g(t)$. Wir betrachten den *homogenen Fall* $g(t) = 0$. Zeigen Sie:

(a) Sind $Q, R$ komplexe Polynome und $P(\lambda) = Q(\lambda)\,R(\lambda)$, dann $P(\frac{d}{dt})x(t) = Q(\frac{d}{dt})R(\frac{d}{dt})x(t)$. (5 Punkte)

(b) Ist $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ Nullstelle von $P$, dann ist $x(t) = e^{\lambda_0 t}$ Lösung von $P(\frac{d}{dt})x(t) = 0$. (5 Punkte)

(c) Ist $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ eine $r$-fache Nullstelle von $P$, dann sind alle Funktionen $x_j(t) := t^j e^{\lambda_0 t}$ mit $j = 0, 1, \ldots, r-1$ Lösungen der Differentialgleichung $P(\frac{d}{dt})x(t) = 0$. (15 Punkte)

*Hinweis*: In dem Fall ist $P(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^r$ mit einem Polynom $Q(\lambda)$; man betrachte $(\frac{d}{dt} - \lambda_0)^r x_j(t)$.

**Abgabe:** Bis Freitag 27.1.2023 um 16:00 Uhr