

ANALYSIS 2 ÜBUNGSBLATT 13

Aufgabe 52: Wachstumsverhalten bei linearer DGL (20 Punkte)

Es sei $A : \mathbb{R} \rightarrow M(n, \mathbb{R})$ stetig. Wir betrachten die DGL $\dot{x} = A(t)x$ in \mathbb{R}^n . Für jedes $t \in \mathbb{R}$ sei $A(t) + A(t)^T$ negativ semidefinit, d.h. $\langle v, (A(t) + A(t)^T)v \rangle \leq 0 \forall v \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Entlang jeder Lösung nimmt die Euklidische Norm monoton ab, d.h. $\|x(t_1)\| \geq \|x(t_2)\|$ für $t_1 < t_2$.

Tipp: Berechnen Sie $\frac{d}{dt} \langle x(t), x(t) \rangle$.

Aufgabe 53: Der Lösungsoperator einer linearen DGL (25 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \rightarrow M(n, \mathbb{R})$ stetig. Sei $\Phi(t_0, t_1) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Propagator der homogenen linearen Differentialgleichung $\dot{x} = A(t)x$ vom Anfangszeitpunkt t_0 bis zur Zeit t_1 , also $\Phi(t_0, t_1)x_0 = x(t_1)$ für die maximale Lösung von $\dot{x} = A(t)x$ mit $x(t_0) = x_0$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $t_0, t_1 \in I$ ist $\Phi(t_0, t_1)$ ein Vektorraumisomorphismus (also linear und bijektiv).

(b) Die Matrix $\Phi(t_0, t)$ erfüllt $\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t_0, t) = A(t)\Phi(t_0, t)$ und $\Phi(t_0, t_0) = E_n$.

Aufgabe 54: Die Dyson-Reihe (30 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Intervall, $t_0 \in I$ und $A : I \rightarrow M(n, \mathbb{R})$ stetig. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t)x \quad (1)$$

und machen den Ansatz

$$x(t) = \left(E_n + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{j-1}} dt_j A(t_1) \cdots A(t_j) \right) x_0. \quad (2)$$

(a) Rechnen Sie nach, dass x die Differentialgleichung (1) zumindest formal löst, also indem Sie die Reihe einfach gliedweise differenzieren.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe in der Definition von $x(t)$ absolut konvergent ist für alle $t \in I$.

(c) Zeigen Sie, dass $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und x tatsächlich die Differentialgleichung (1) löst.

Hinweis: Hierzu müssen Sie zeigen, dass Sie die Reihe gliedweise differenzieren dürfen. Eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass die Partialsummenfolge der abgeleiteten Reihe gleichmäßig konvergiert (das ist ein Satz aus Analysis 1).

Aufgabe 55: Variation der Konstanten (25 Punkte)

Bestimmen Sie für folgende inhomogene lineare Differentialgleichungen die Lösung jeweils zu allen Anfangswerten $x_0 \in \mathbb{R}$.

(a) $\dot{x} = -\frac{x}{1+t} + e^{2t}$ für beliebiges $t_0 \in (-1, \infty)$.

(b) $\dot{x} = \tan(t)x + \frac{1}{\cos(t)}$ für $t_0 = 0$.

Abgabe: Bis Freitag 3.2.2023 um 16:00 Uhr