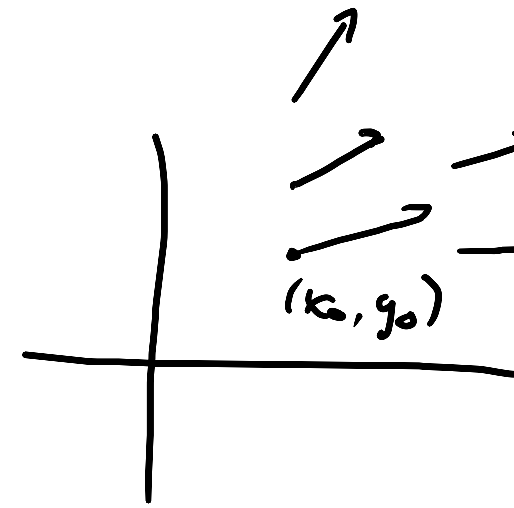
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \qquad \frac{df}{dt}, \qquad \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}$$



$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\nabla f(x_0,y_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right)$$

Gradient von f, "Nabla": $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$

$\nabla f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Vektorfeld

Optimierung: bei einem Maximum (x_0, y_0) gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \qquad \text{d.h. } \nabla f(x_0,y_0) = 0$$

Höhere partielle Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f(x_1 \ldots x_n)}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}$$

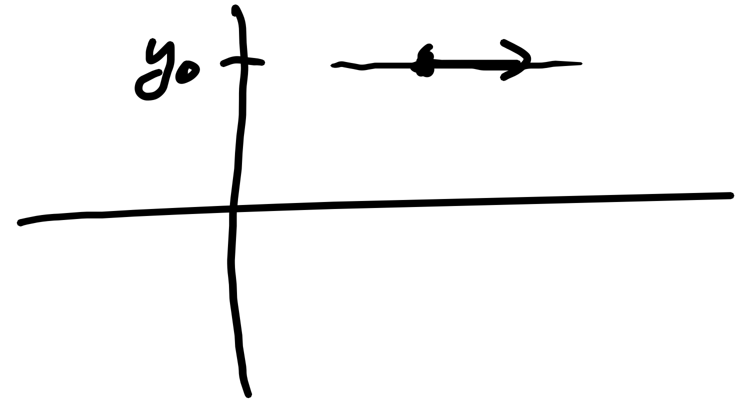
$i = j$: $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

<u>Bem</u> Polynome $p(x_1 \ldots x_n)$ ÜA:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \, \partial x_i} = \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \, \partial x_j} \qquad \text{(allg. Kap. 4)}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \, \partial x_j \, \partial x_i}, \quad \ldots$$

$$\underline{x}(t) = (x_0 + t,\ y_0)$$



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{d}{dt}\, f(\underline{x}(t))\Big|_{t=0}$$

Richtungsableitung: Sei $\underline{0} \neq \underline{v} \in \mathbb{R}^2$

von f in (x_0, y_0):

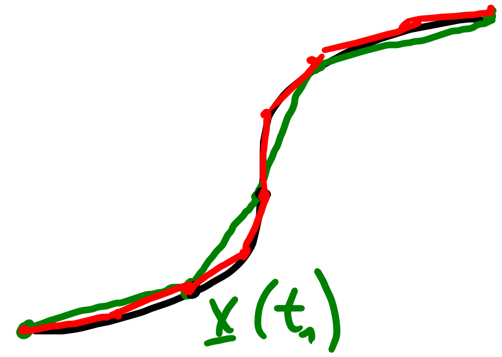
$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0, y_0) := \frac{d}{dt}\, f\big((x_0, y_0) + t\underline{v}\big)\Big|_{t=0}$$

<u>Bem</u> Polynome p ÜA: $\frac{\partial p}{\partial \underline{v}} = v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} = \underline{v} \cdot \nabla p$

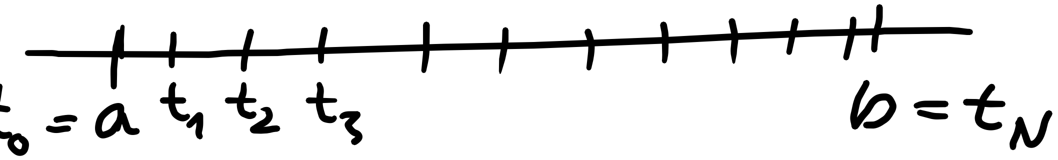
(allg. Kap. 4)

0.5 Kurvenlänge

$\underline{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$



Länge $L(\underline{x})$. Dazu



$$U_N := \left\{ (t_0, t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^{N+1} : a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b \right\}$$

$$U = \bigcup_{N=1}^{\infty} U_N$$

$$L(\underline{x}) \geq \sum_{i=1}^{N} d(x(t_{i-1}), x(t_i))$$

Def $L(\underline{x}) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{N} d(x(t_{i-1}), x(t_i)) : (t_0, \dots, t_N) \in U \right\}$

$\in [0, \infty]$

Ich berichte:

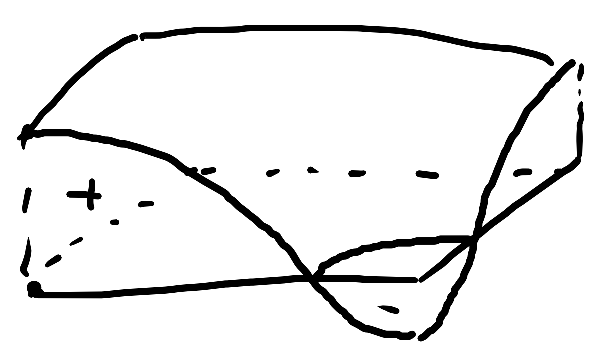
<u>Satz</u> Sei $\underline{x}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ derart, dass jede Komponentenfunktion $x_i:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig diffbar ist. Dann

$$L(\underline{x}) = \int_a^b \left\| \frac{d\underline{x}}{dt} \right\| dt$$

0.6 Flächenintegrale

$D\subset\mathbb{R}^2$, $f: D\to\mathbb{R}$, $\int_D f(\underline{x})\,d\underline{x}$ = signiertes Vol. zwischen Graph(f) und x_1x_2-Ebene

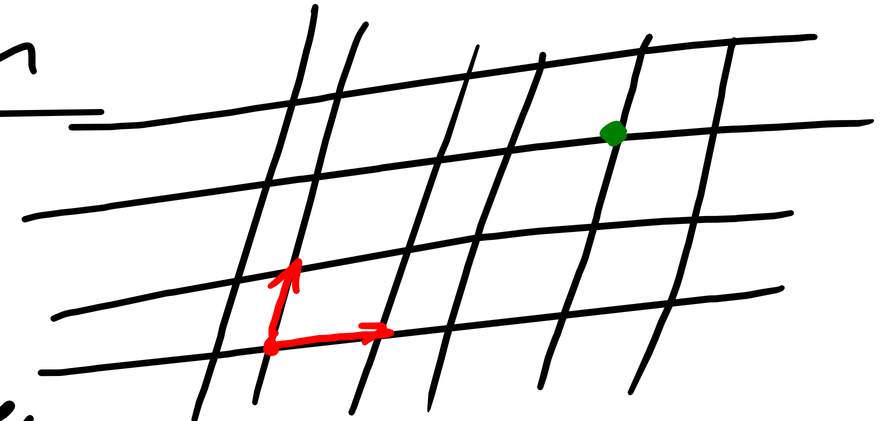
$d\underline{x} = d^2\underline{x} = dA$



Mittelwert(f) :=

$$\bar{f} := \frac{1}{\text{area}(D)} \int_D f(\underline{x})\,d\underline{x}$$

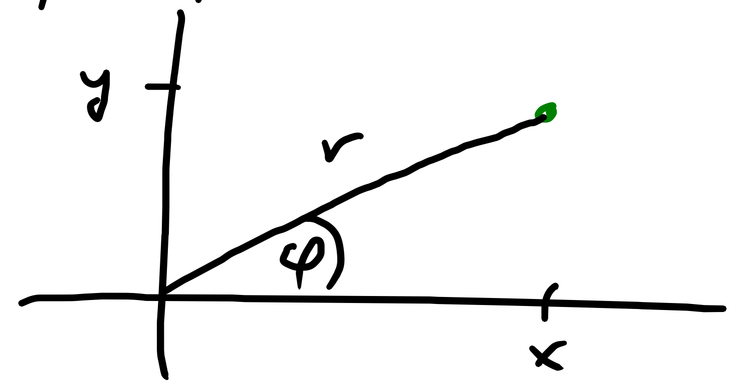
0.7 Polarkoordinaten



Basen von V

krummlinige Koordinaten

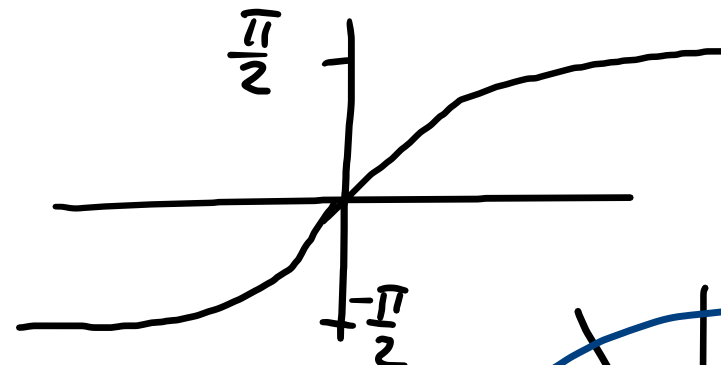
Polarkoordinaten

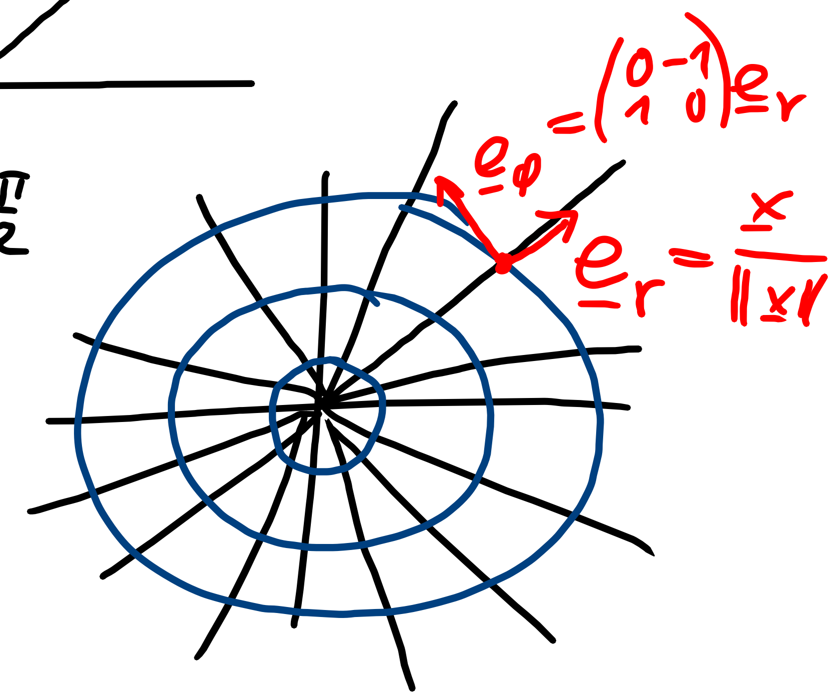


$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

mit $r \in [0,\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$





$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{falls } x > 0,\ y \geq 0 \\ \pi/2 & \text{falls } x = 0,\ y > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{falls } x < 0 \\ -\pi/2 & \text{falls } x = 0,\ y < 0 \\ 2\pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{falls } x > 0,\ y < 0 . \end{cases}$$

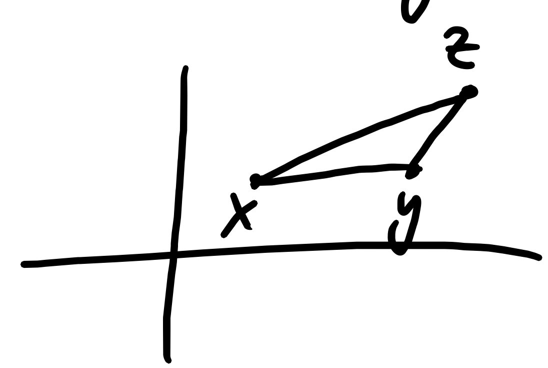
Kap. 1: Topologische, metrische und normierte Räume

1.1 Def X = Menge, $d: X \times X \to [0,\infty)$ heißt <u>Metrik</u> auf X, wenn $\forall x,y,z \in X$

i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ ("Definitheit")

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ ("Symmetrie")

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ ("Dreiecks-Ungl.")



Dann heißt (X,d) <u>metrischer Raum</u> und $d(x,y)$ der <u>Abstand</u> von x und y.

1.2 Bsp a) $X = \mathbb{R}^n$,

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

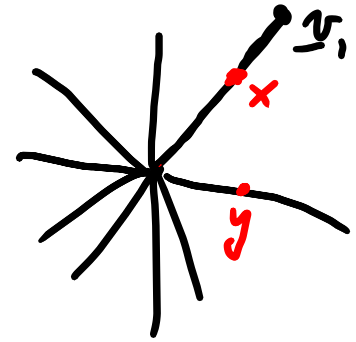
ist eine Metrik. (ÜA), "Euklidische Metrik"

b) X bel., $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

heißt die <u>diskrete Metrik</u> auf X

(Bsp: $X = \left\{ \frac{e_1}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{e_n}{\sqrt{2}} \right\} \subset \mathbb{R}^n$

$$d_{Eukl}\left(\frac{e_i}{\sqrt{2}}, \frac{e_j}{\sqrt{2}} \right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = j \\ 1 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

c) $\mathbb{R}^n \supset X =$ 

$X = \bigcup_{i \in J} \{ s\underline{v}_i : 0 \le s \le 1 \}$, $\|v_i\| = 1$ in $\mathbb{R}^n$

d = Entf. in X

$$d(s\underline{v}_i, t v_j) = \begin{cases} |s-t| & \text{falls } i=j \\ s+t & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

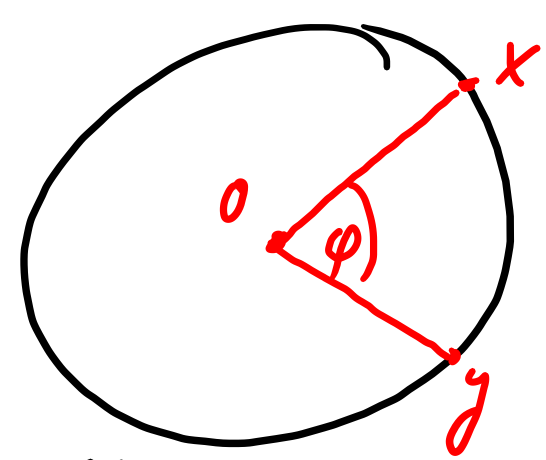
$x \cdot y = \underbrace{\|x\|}_{1} \underbrace{\|y\|}_{1} \cos \varphi$

"Metrik des franz. Eisenbahnsystems"

d) $X = S^2 \subset \mathbb{R}^3$

$X = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\underline{x}\| = 1 \}$

d = Entf. entlang X



$d_{Sph}(x,y) = \arccos(x \cdot y)$ "sphärische Metrik"

1.3 Def Sei (X,d) metr. Raum, $Y \subset X$.

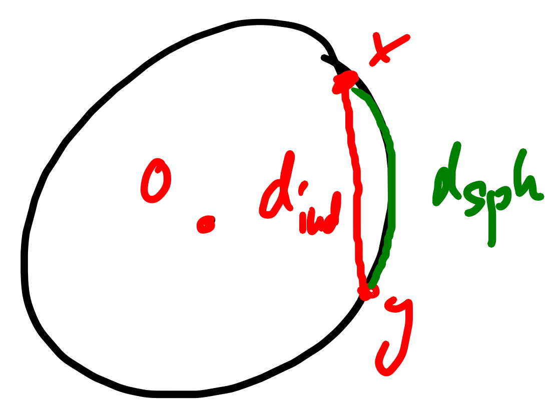
Die <u>induzierte Metrik</u> auf Y, d_{ind}, ist

$$d_{ind}(y_1, y_2) = d(y_1, y_2) \quad \forall y_1, y_2 \in Y,$$

d.h. $d_{ind} = d\big|_{Y \times Y}$

Bem d_{ind} ist eine Metrik auf Y.

Bsp d_{ind} auf $S^2 \subset R^3$, mit d_{Eukl} unterscheidet sich von ~~_~~ d_{sph}.



(2.96) **Def** Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume.

$f: X \to Y$ heißt **Isometrie**, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in X: \quad d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2).$$

(X, d_X) und (Y, d_Y) heißen **isometrisch**, wenn $\exists$ bij. Isometrie $f: X \to Y$.

Bem "isometrisch" ist eine Äq. rel. auf den metr. Räumen.

($f^{-1}: Y \to X$ ist auch bij. Isometrie)

Bsp Diese $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sind bij Isometrien:
(nicht die einzigen)

Translationen $f(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{a}$ mit konst. $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$

Spiegelungen $f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

wobei alle $\lambda_j \in \{+1, -1\}$

Rotationen $f(\underline{x}) = R\underline{x}$, $R \in SO(n)$

$= \left\{ R \in M(n \times n, \mathbb{R}) : \begin{array}{l} \det R = 1 \\ R R^t = E \end{array} \right\}$

Def Ein n-dim <u>Euklidischer Raum</u> ist ein metrischer Raum, der isometrisch ist zu $(\mathbb{R}^n, d_{Eukl})$.

Bem hier Isometrie zu $(\mathbb{R}^n, d_{Eukl})$ ist Cartesisches Koord. system.

1.5 Def Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$$\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$$

heißt eine **Norm** auf V, wenn $\forall x,y \in V \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (Definitheit)

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ (Homogenität)

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecks-Ungl.)

$(V, \|\cdot\|)$ heißt dann ein **normierter Raum**.

Prop 1.6 Auf jedem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ wird durch $d(x,y) := \|x-y\|$ eine Metrik definiert.

<u>Bew</u> i) $d(x,y) = 0 \iff \|x-y\| = 0$

$\overset{(i)}{\iff} \quad x - y = 0 \iff x = y.$

ii) $d(y,x) = \|y - x\| = \|(-1)(x-y)\|$

$\overset{(ii)}{=} |-1| \, \|x-y\| = \|x-y\| = d(x,y)$

iii) $d(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\|$

$\overset{(iii)}{\leq} \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z). \quad \square$

<u>Bem 1.8</u> Jeder norm. R. ist zugl. metr. R.

Diese Metrik ist <u>translations-invariant</u>:

$\forall a \in V: \quad d(x+a, y+a) = d(x,y).$