Def **Norm** $\|\cdot\|: V \longrightarrow [0,\infty)$

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (Definitheit)

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ (Homogenität)

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecks-Ungl.)

Prop 1.6 Norm $\Rightarrow$ Metrik $d(x,y) = \|x-y\|$

Bsp 1.7 a) Die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$, (auch "2-Norm")

$$\|x\|_2 = \|x\|_{\text{Eukl.}} := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

ist eine Norm (ÜA Bl. 3)

b) Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^n$ („∞-Norm“)

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

Summennorm („1-Norm“) auf $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$$

p-Norm, $p \in [1,\infty)$ auf $\mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$$

sind Normen. (ohne Beweis)

Tatsächlich $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$

c) Funktionenräume. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$\| f \|_1 := \frac{1}{b-a} \int_a^b dx \quad |f(x)|$$

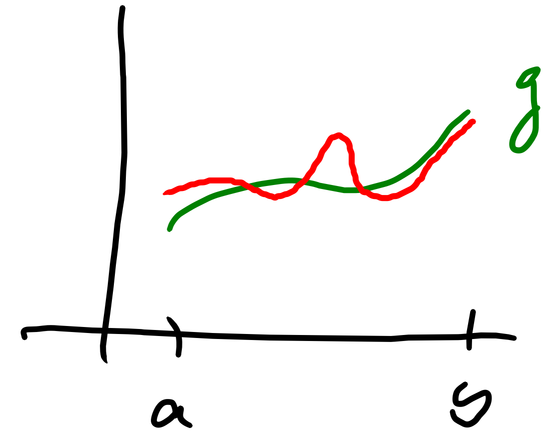
$$\| f \|_2 := \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b dx \quad |f(x)|^2 \right)^{1/2}$$

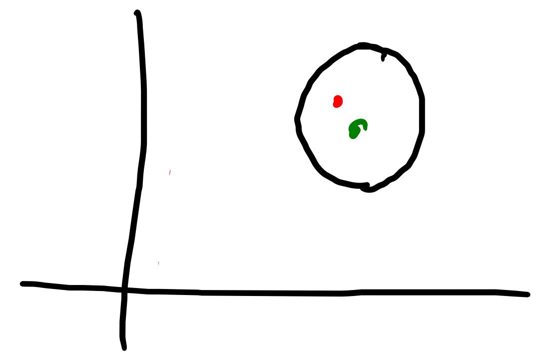
$$\| f \|_p := \left(\int_a^b dx \quad |f(x)|^p \right)^{1/p}$$

$$\| f \|_\infty := \sup \{ |f(x)| : x \in [a,b] \}$$

Sind für manche f nicht def. (oder ∞)
Sind def. in $[0,\infty)$ für stetiges f.
$\| \cdot \|_\infty$ ist def. für beschr. f.

$$\| h(x) - g(x) \|$$





Prop Allg. X bel. Menge, $V = \{ f : X \to \mathbb{C} \mid \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty \} = \{ f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ beschr.} \}$

Dann ist $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$ eine Norm auf V.

Bew (i) $\|f\|_\infty = 0 \iff f(x) = 0 \ \forall x \in X \iff f = 0$.

(ii) $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in X} |\lambda f(x)|$

$$= \sup_{x\in X} |\lambda|\,|f(x)|$$

$$= |\lambda| \sup_{x\in X} |f(x)| = |\lambda|\,\|f\|_\infty .$$

(iii) $\underline{3.3}$: $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

$\forall x\in X$: $\quad |f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|$

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)+g(x)|$$

$$\le \sup_{x\in X} \big(|f(x)| + |g(x)| \big)$$

$$\le \Big(\sup_x |f(x)|\Big) + \Big(\sup_x |g(x)|\Big) = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \square$$

$$a(x) \le \overset{b}{\cancel{g}}(x) \Rightarrow \sup_x a(x) \le \sup_x b(x) \ ?$$

Bsp: $\exists \max a(x) = a(x_0) \le b(x_0)$

$$\max b(x) = b(x_1) \ge b(x_0)$$

$$\sup\big(f(x) + g(x)\big) \le \sup f(x) + \sup g(x)$$

Bsp max:

$$\max\big(f(x)+g(x)\big) = f(x_0) + g(x_0) \le f(x_1) + g(x_2)$$

$$\max f(x) = f(x_1), \quad \max g(x) = g(x_2)$$

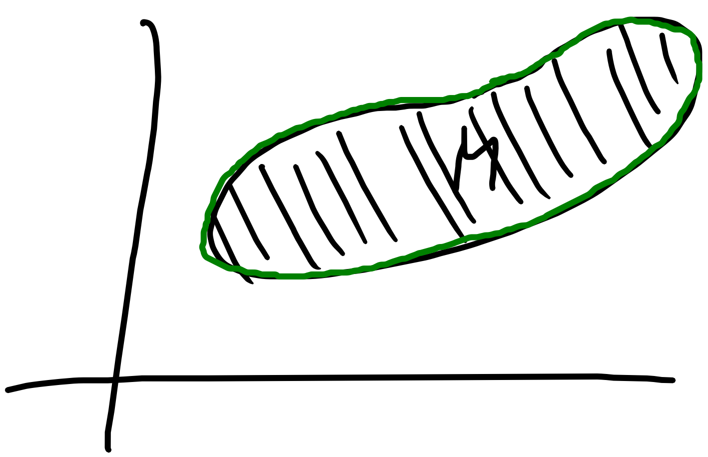
(d) Ersetze $\mathbb{C}$ durch bel. normierten Raum $(Y, \|\cdot\|_Y)$, $f: X \to Y$

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y$$

ist Norm auf $V = \{ f: X \to Y \mid \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y < \infty \}$.

Offene und abgeschlossene Mengen

Anschaulich: Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist **offen**, wenn sie keinen ihrer Randpunkte enthält.



M ist **abgeschlossen**, wenn sie jeden ihrer Randpunkte enthält.

Def 1.9 Sei (X, d) metr. Raum.

a) Für $x_0 \in X$, $r > 0$ heißt

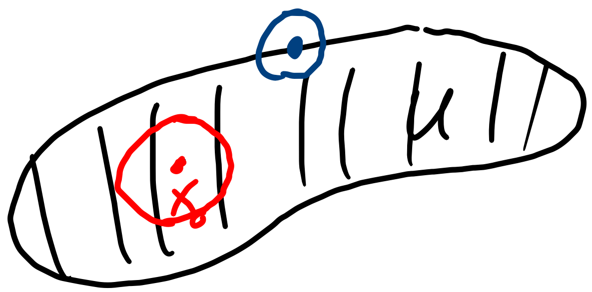
$$B_r(x_0) := \{ x \in X \mid d(x, x_0) < r \}$$

~~heißt~~ der **offene Ball** um x_0 mit Radius r.

b) $U \subset X$ heißt eine <u>Umgebung</u> von $x_0 \in X$,

falls $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset U$

Man sagt dann, x_0 sei <u>innerer Punkt</u> von U.



Insbes. ist $B_r(x_0)$ Umg. von x_0.

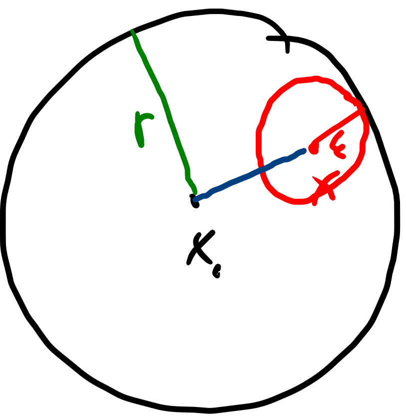
c) $M \subset X$ heißt <u>offen</u>, falls

$$\forall x \in M \ \exists \varepsilon > 0 : \ B_\varepsilon(x) \subset M$$

Also M offen $\iff$ M ist Umg. jedes ihrer El.

$\iff$ M enthält nur innere Punkte.

Bsp 1.10 a) $B_r(x_0)$ ist stets offen.



Bew Sei $x \in B_r(x_0)$, dann $d(x, x_0) < r$

Setze $\varepsilon := r - d(x, x_0) > 0$

$y \in B_\varepsilon(x) \Longrightarrow d(y, x_0) \leq \underbrace{d(y, x)}_{< \varepsilon} + \underbrace{d(x, x_0)}_{= r - \varepsilon}$

$< \varepsilon + r - \varepsilon = r$ $\square$

b) $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ist offen bzgl. Eukl. Metrik $d(x,y) = |x - y|$.

Bew: $(a, b) = B_{\frac{b-a}{2}}\left(\frac{a+b}{2}\right)$ $\square$

c) Sei d = diskrete Metrik auf X. Dann ist __jede__ Teilmenge M von X offen.

Bew: $B_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\}$, daher $\forall x \in M \; \exists \varepsilon = \frac{1}{2} : B_\varepsilon(x) \subset M$. $\square$

Prop. 1.11 Sei X metr. Raum

a) $\emptyset$ und X sind offen.

b) Sind $M_1, \dots, M_k \subset X$ offen, so ist auch $\bigcap_{i=1}^{k} M_i$ offen.

c) Sei J eine Indexmenge. Sind alle $M_i \subset X$, $i \in J$, offen, so ist auch $\bigcup_{i \in J} M_i$ offen.

Bew a) Klar.

b) Sei $x \in \bigcap_{i=1}^{k} M_i$. Wegen $x \in M_i$ und

M_i offen gibt es $r_i > 0$ mit $B_{r_i}(x) \subset M_i$.

$\varepsilon := \min\{r_1 \dots r_k\} > 0$. Dann $B_\varepsilon(x) \subset B_{r_i}(x) \subset M_i$,

also $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{i=1}^{k} M_i$.

c) Sei $x \in \bigcup_{i \in J} M_i$. Dann gibt es $i_0 \in J$ mit $x \in M_{i_0}$.

Da M_{i_0} offen, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset M_{i_0} \subset \bigcup_{i \in J} M_i$.

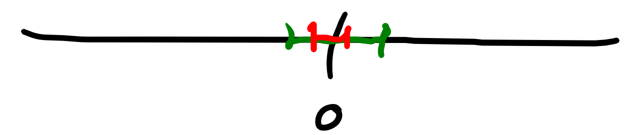
$\square$

* Zusammenfassung von b) und c):

„endl. Schnitte offener Mengen sind offen.
bel. Vereinigungen offener Mengen sind offen."

Bel. Schnitte offener Mengen sind im Allg. nicht offen:

<u>Bsp:</u> $I_n := \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R}$ offen $\forall n \in \mathbb{N}$



$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{0\} \text{ nicht offen}$$