**Def** $(X, d)$ metr. Raum

$M \subset X$ **offen** $\Leftrightarrow$ $\forall x \in M \; \exists \varepsilon > 0 :$

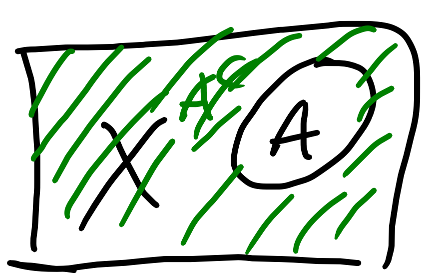
$$B_\varepsilon(x) \subset M$$

**Def 1.13** Sei $(X, d)$ metr. Raum

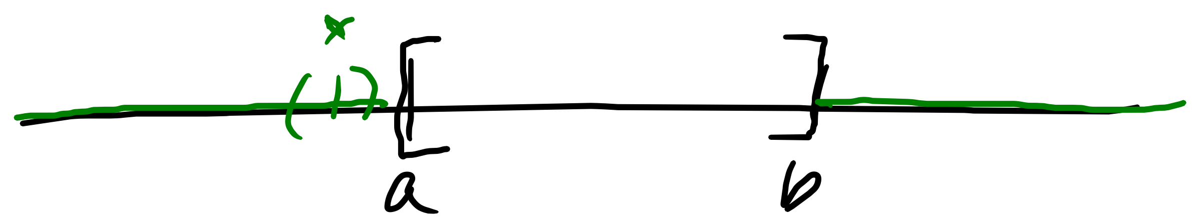
$A \subset X$ heißt **abgeschlossen** $\Leftrightarrow$

$A^c$ ist offen.

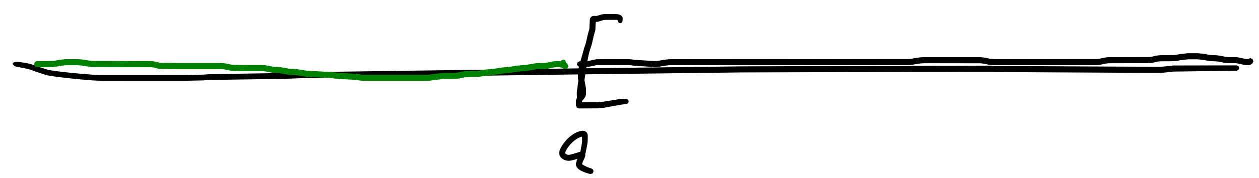
$A^c$ = Komplement von $A = X \setminus A$.



**Bsp 1.14** a) $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ist abg.

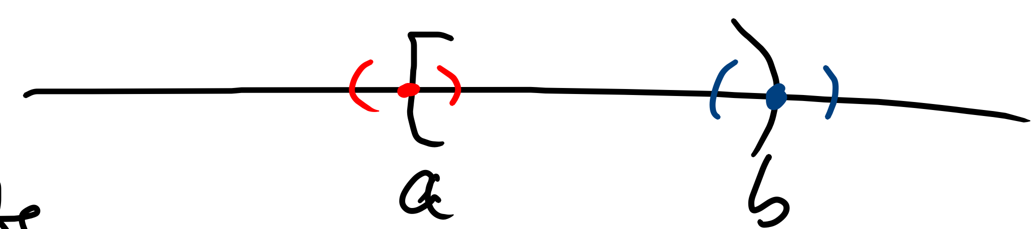



b) $[a,\infty) \subset \mathbb{R}$ ist abg.




c) $[a,b) \subset \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < b < \infty$

ist weder offen noch abg.




d) Sei $(X,d)$ metr. Raum: $\emptyset$ und $X$ sind sowohl offen als auch abg. <u>in $X$</u>.

e) Sei $X := [0,\infty) \subset \mathbb{R}$, $d = d_{ind}$

Dann ist $[0,1)$ offen in $X$, aber nicht in $\mathbb{R}$.

(Denn in $X$ ist $B_r(0) = [0,r)$.)

<u>Prop 1.16</u> In jedem metr. Raum $(X,d)$ gilt:

a) $\emptyset$ und $X$ sind abg.

b) Sind $M_1, \dots, M_k \subset X$ abg., dann ist auch

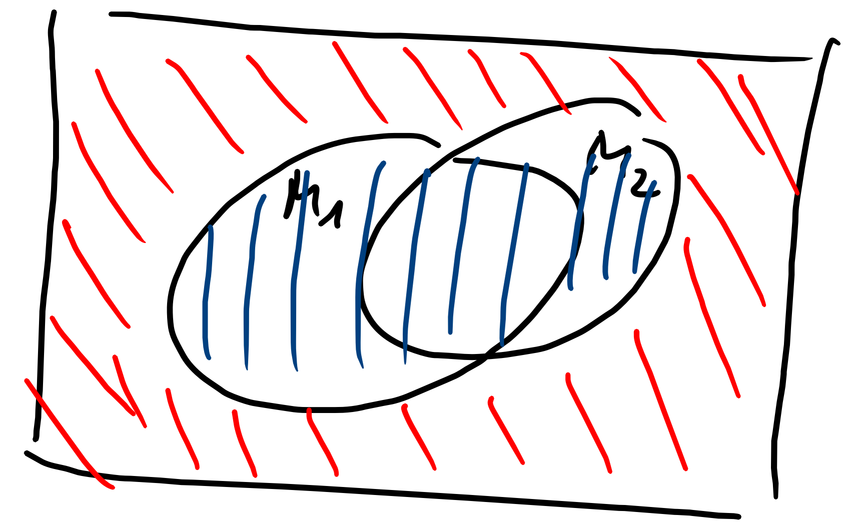
$$\bigcup_{i=1}^{k} M_i \text{ abg.}$$

c) Bel. Schnitte abg.er Mengen sind abg.

D.h. wenn $\forall i \in J$: $M_i$ abg., dann $\bigcap_{i\in J} M_i$ abg.

<u>Beweis</u> Folgt aus Prop. 1.11 und den de Morgan-Regeln:

$$\underbrace{\Big(\underbrace{\bigcup_{i\in J} M_i}\Big)^c} = \bigcap_{i\in J} M_i^c$$




$$\Big(\bigcap_{i\in J} M_i\Big)^c = \bigcup_{i\in J} M_i^c$$

$\square$

# Abstrakter Konzept der topologischen Räume

norm. Räume $\longrightarrow$ metr. Räume $\longrightarrow$ top. Räume

Topologie (als Zweig der Mathematik)

= Studium von Figuren
modulo Verformung

(Bsp: Knotentheorie

Knoten = $\underbrace{\text{geschl.}}_{x(b) = x(a)}$ Kurve $x : [a,b] \to \mathbb{R}^3$

Kleeblattschlinge
"aus Gummi")

technisches Konzept "Topologie"

= "top. Raum":

Man gibt die offenen Mengen an.

<u>Def 1.17</u> Sei $X$ eine Menge,

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X) = \text{Potenzmenge von } X$$

$$= \{\text{alle Teilmengen von } X\}.$$

$\mathcal{T}$ heißt eine <u>Topologie auf</u> $X$ (und $(X, \mathcal{T})$ ein <u>topologischer Raum</u>), wenn

a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

b) wenn $U, V \in \mathcal{T}$, dann $U \cap V \in \mathcal{T}$

c) wenn $\forall i \in J: U_i \in \mathcal{T}$, dann $\bigcup_{i \in J} U_i \in \mathcal{T}$.

$U \in \mathcal{T}$ heißen dann offene Mengen,
ihre Komplemente abg. Mengen.

Also: Jede Metrik definiert eine Topologie.

Def Sei $A \subset X$ ($X$ top. Raum)
$x_0 \in A$
$x_0$ heißt innerer Punkt von $A$
(und $A$ heißt Umgebung von $x_0$), wenn

$$\exists M \in \mathcal{T} : x_0 \in M \text{ und } M \subset A.$$

<u>Def 1.19</u> Sei $X$ top. R., $Y \subset X$

a) $\mathring{Y} := \bigcup\limits_{\substack{U \subset Y \\ U \text{ offen}}} U$ heißt das <u>Innere von $Y$</u> oder der <u>offene Kern von $Y$</u>

(Beachte: $\mathring{Y}$ ist offen, $\mathring{Y} \subset Y$.)

b) $\overline{Y} := \bigcap\limits_{\substack{A \supset Y \\ A \text{ abg.}}} A$ heißt <u>der Abschluss von $Y$</u> oder die <u>abg. Hülle von $Y$</u>.

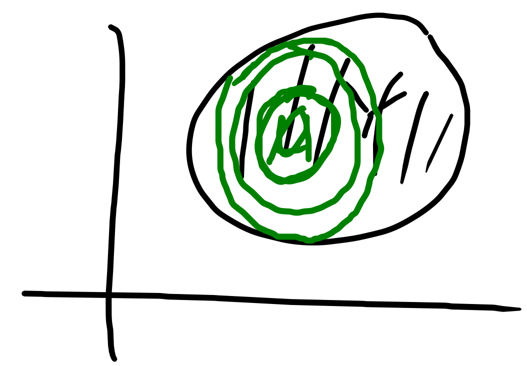
(Beachte: $\overline{Y}$ ist abg., $\overline{Y} \supset Y$.)

c) $\partial Y := \overline{Y} \setminus \mathring{Y}$ heißt der <u>Rand von $Y$</u>.

Bem 1) $\mathring{Y}$ ist die größte in $Y$ enthaltene offene Menge, d.h.

$\mathring{Y}$ ist offen, $\mathring{Y} \subset Y$, und $\forall U \subset Y$: wenn $U$ offen, dann $U \subset \mathring{Y}$.

Beachte: $\nexists$ größte in $Y$ enthaltene abg. Menge, außer wenn $Y$ abg.



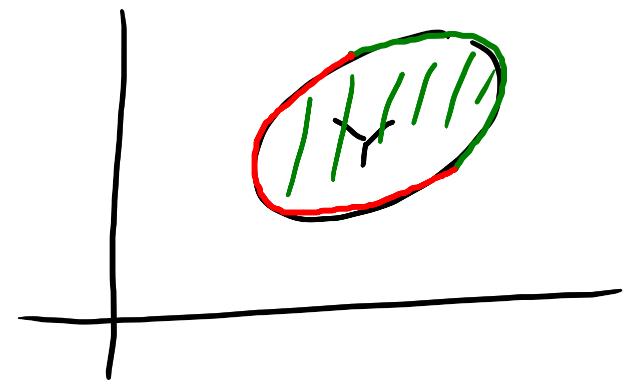
2) $\overline{Y}$ ist die kleinste abg. Menge, in der $Y$ enthalten ist.

3) $Y$ ist offen $\Longleftrightarrow$ $\mathring{Y} = Y$.

4) $Y$ ist abg. $\Longleftrightarrow$ $\overline{Y} = Y$.

4) $\mathring{Y} = \left(\overline{Y^c}\right)^c$

$\overline{Y} = \left((Y^c)^\circ\right)^c$



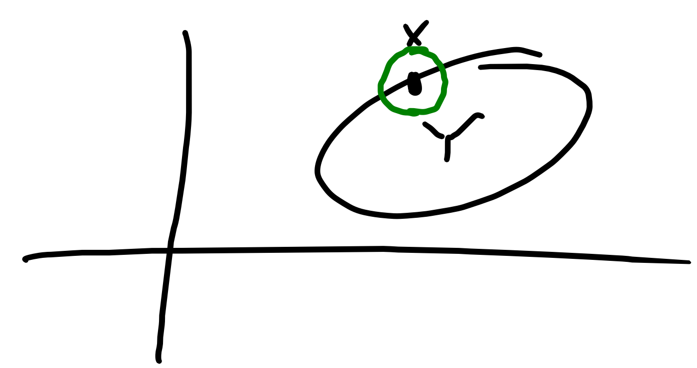
$(Y^c)^\circ = (\overline{Y})^c \,, \quad \overline{Y^c} = (\mathring{Y})^c$

**Prop 1.20** Sei $X$ top. Raum, $Y \subset X$.

a) $\mathring{Y} = \{$ innere Punkte von $Y\}$

b) $\forall x \in X$: $\quad x \in \partial Y \iff$

jede Umg. von $x$ enthält einen Punkt aus $Y$ und einen Punkt aus $Y^c$



c) $\mathring{Y} = Y \setminus \partial Y$

d) $\partial(Y^c) = \partial Y$

e) $\overline{Y} = Y \cup \partial Y$

<u>Bew</u> a, b) ÜA 15 Bl. 3

c) $\partial Y \overset{def}{=} \overline{Y} \setminus \mathring{Y}$, $\quad A \setminus B = A \cap B^c$

$\Rightarrow \partial Y = \overline{Y} \cap (\mathring{Y})^c$

$\Rightarrow (\partial Y)^c = \left( \overline{Y} \cap (\mathring{Y})^c \right)^c \overset{deM}{=} (\overline{Y})^c \cup \mathring{Y}$

$\Rightarrow Y \setminus \partial Y = Y \cap (\partial Y)^c = Y \cap \left( (\overline{Y})^c \cup \mathring{Y} \right)$

$$= \underbrace{\left( Y \cap \underbrace{(\overline{Y})^c}_{(Y^c)^\circ \subset Y^c} \right)}_{\emptyset} \cup \left( \underbrace{Y \cap \mathring{Y}}_{\mathring{Y}} \right) = \mathring{Y}$$

d) $\partial(Y^c) = \overline{Y^c} \setminus (Y^c)^\circ$

$= (\mathring{Y})^c \setminus (\overline{Y})^c = (\mathring{Y})^c \cap \overline{Y}$

$= \overline{Y} \setminus \mathring{Y} = \partial Y.$

e) $\overline{Y} = ((Y^c)^\circ)^c \overset{d)}{=} (Y^c \setminus \underbrace{\partial(Y^c)}_{\partial Y})^c$

$\left[ (A \setminus B)^c = A^c \cup B \right]$

$\overset{\downarrow}{=} Y \cup \partial Y. \quad \square$

**Bsp. 1.21** a) $Y := (a,b] \subset \mathbb{R} =: X$, Dann

$\mathring{Y} = (a,b)$, $\overline{Y} = [a,b]$, $\partial Y = \{a,b\}$.

b) $Y := \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 :$ $B_\varepsilon(x) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

und $B_\varepsilon(x) \cap \mathbb{Q}^c \neq \emptyset$

daher $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

$$\mathring{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \setminus \partial\mathbb{Q} = \emptyset$$

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}.$$

**Def 1.22** Sei $X$ top. Raum.

Eine Folge $(x_n)$ in $X$ heißt

**konvergent gegen $a \in X$** („$\lim_{n\to\infty} x_n = a$",

„$x_n \to a$"), wenn gilt: Für jede Umg.

$U \subset X$ von $a$ $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N$: $x_n \in U$.

**Bem** $x_n \to a \Leftrightarrow$ jede Umg von $a$ enthält alle bis auf endl. viele Folgenglieder.