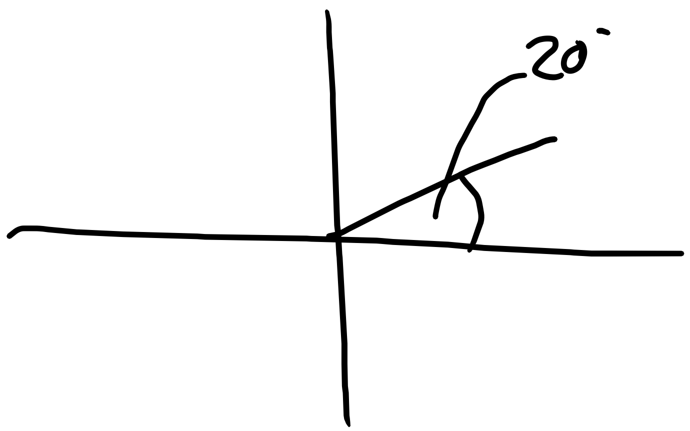
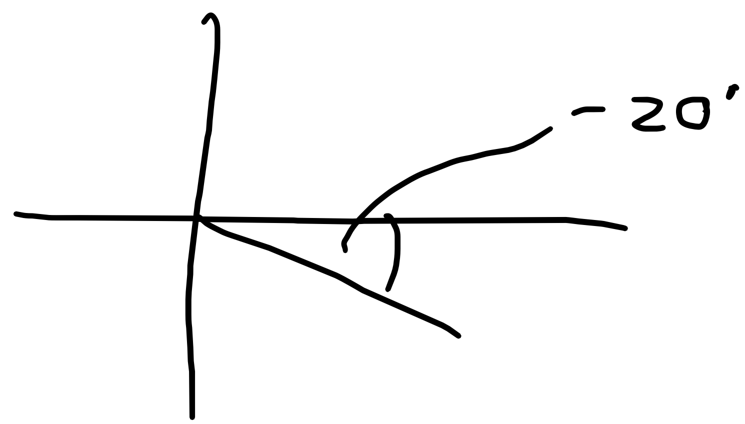
Frage: ÜA 8, "westliche Länge positiv, östlich negativ gerechnet"





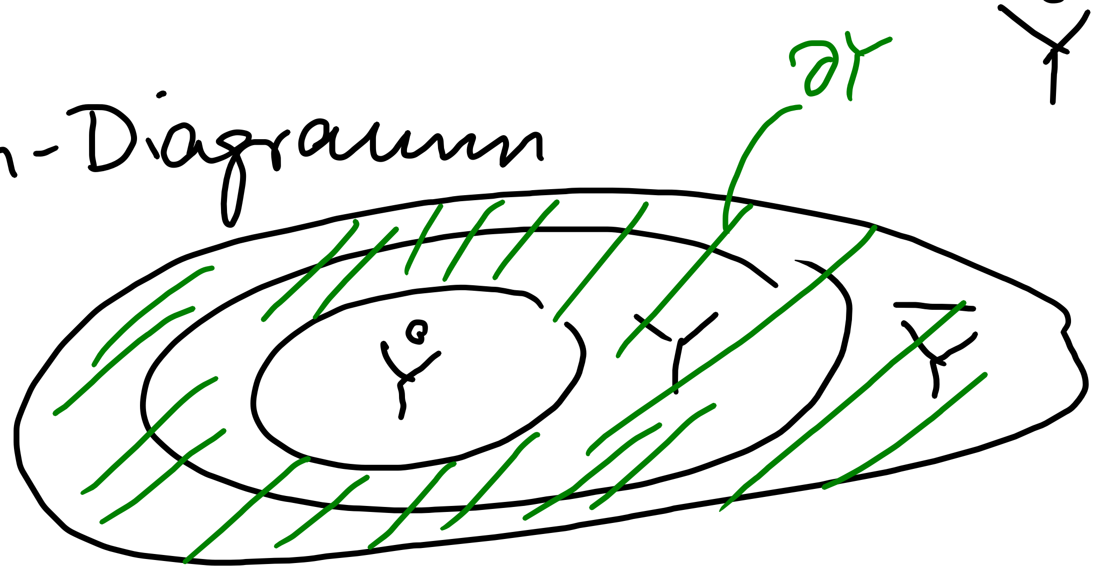
Nachtrag zur letzten Vorl.

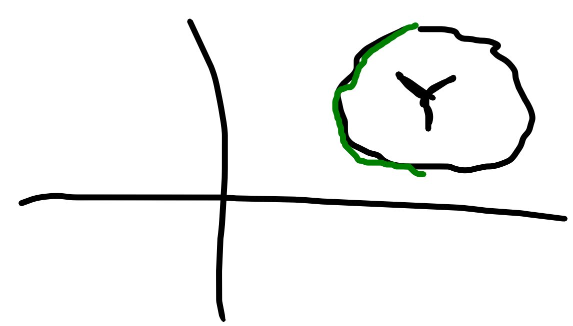
$\bar{Y} = \mathring{Y} \cup \partial Y \quad (\bar{Y} = Y \cup \partial Y)$

$\mathring{Y} = \bar{Y} \setminus \partial Y \quad (\mathring{Y} = Y \setminus \partial Y)$

Def $\partial Y := \bar{Y} \setminus \mathring{Y}$

Venn-Diagramm





Konvergente Folgen

Def X top. Raum, $x_n \in X$

$\underline{x_n \to a}$ $\iff$ $\forall$ Umg U von a:

$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: \ x_n \in U.$

($\underbrace{\text{alle bis auf endlich viele}}_{\text{„fast alle"}}$ Folgenglieder $\in U$)

Bem 1.23 X metr. Raum:

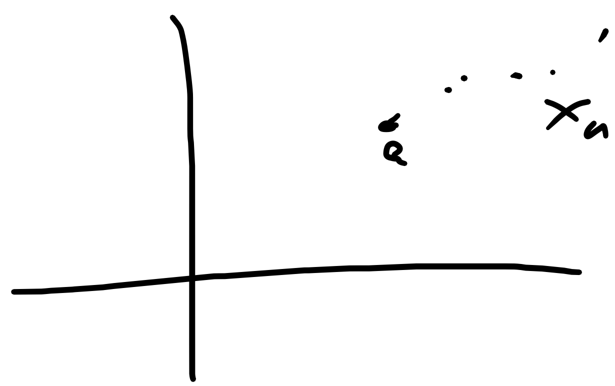
$x_n \to a \iff d(x_n, a) \to 0$ in $\mathbb{R}$.

d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: \ d(x_n, a) < \varepsilon.$

Bew ÜA 13 Bl. 3.

Bem In $(\mathbb{R}^m, d_{\text{Eukl}})$ gilt:

$$x_n \to a \iff \forall i \in \{1 .. \overset{m}{\cancel{n}}\}: x_{ni} \to a_i$$

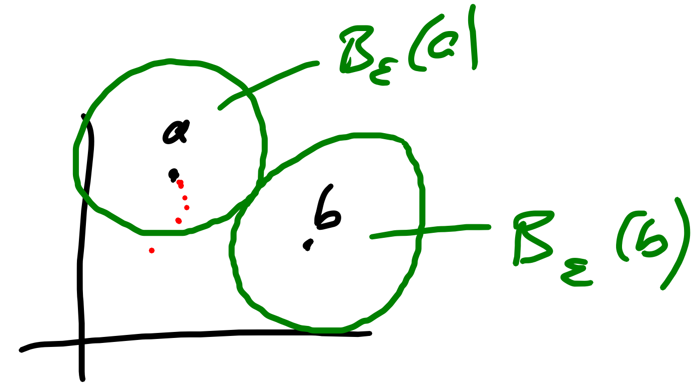


Bew ÜA 13

Def 1.24 Sei X top. R., (x_n) Folge in X.
$a \in X$ heißt Häufungspunkt von (x_n), wenn jede Umg. von a ∞-viele Folgenglieder enthält.

Bem Sei X metr. Raum, $x_n \to a$. Dann
$\{HPe\} = \{a\}$. Insbes. $\nexists$ 2 Limiten.

<u>Bew</u> $a \in \{HPe\}$ weil in jeder Umg. U von a fast alle x_n liegen, also ∞ viele.



gäbe es HP $b \neq a$, setze

$$\varepsilon := \frac{d(a,b)}{2},$$

dann

$$B_\varepsilon(a) \cap B_\varepsilon(b) = \emptyset$$

(denn sonst $x \in B_\varepsilon(a) \cap B_\varepsilon(b)$

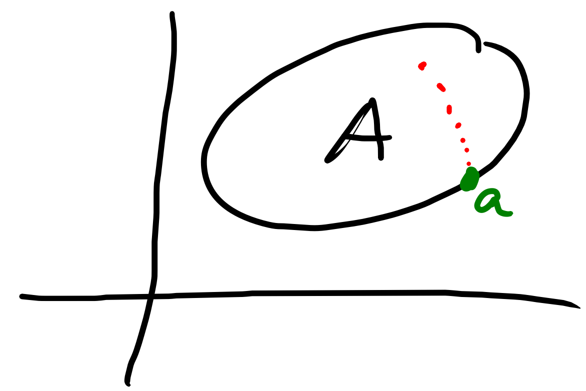
$$\rightarrow \quad d(a,b) \leq \underbrace{d(a,x)}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(x,b)}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon = d(a,b) \ \lightning \ )$$

∞ viele x_n in $B_\varepsilon(b) \Longrightarrow$ nicht fast alle $x_n \in B_\varepsilon(a)$ $\lightning$ zu $x_n \to a$. $\square$

<u>Satz 1.25</u> Sei X metr. R., $A \subset X$, $a \in X$.

Es gilt $a \in \overline{A} \iff \exists\, (x_n)$ in A : $x_n \to a$.

Insbes. A abg $\iff$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{für jede konv. Folge } (x_n) \text{ in } A \\ \text{liegt der Limes in } A. \end{array} \right.$



<u>Bew</u> 1. Aussage

"$\Rightarrow$": Sei $a \in \overline{A}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$: $B_{\frac{1}{n}}(a) \cap A \neq \emptyset$. Wähle $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \cap A$.

Dann $x_n \in A$ und $d(x_n, a) < \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$, also $x_n \to a$.

„$\Leftarrow$": Gelte $x_n \to a$, $\forall n: x_n \in A$.

Wäre $a \notin \overline{A}$, dann $a \in \underbrace{X \setminus \overline{A}}_{\text{offen}}$ = Umg. von a

$\Rightarrow x_n \in X \setminus \overline{A}$ für fast allen n $\lightning$

Aussage 2:

„$\Rightarrow$": Sei A abg., also $A = \overline{A}$.

Sei $x_n \to a$, $x_n \in A$,

Gerade gezeigt: $a \in \overline{A} = A$.

„$\Leftarrow$": Sei $a \in \overline{A}$ bel. Wie gezeigt,

$\exists x_n \in A: x_n \to a$, Vor $\Rightarrow a \in A$.

Also $A = \overline{A}$, d. h. A abg. $\square$

<u>Bem</u> punktw. und glm. Konv. $f_n \to f$

$f_n, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

pktw: $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

glm: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall x \in \mathbb{R}:$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

glm. Konv = Konv. bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

denn $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \iff \forall x \in \mathbb{R}: |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

aber für pktw. Konv. $\nexists \|\cdot\|$

aber pktw. Konv $\hat{=}$ Topologie auf $\{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

(ohne Beweis) nämlich $M \in \mathcal{J} \iff$

$\exists M_i,\ i \in J: M = \bigcup_{i \in J} M_i$ und

$\forall i \in J \ \exists\ x_1 \ldots x_k,\ a_1 \ldots a_k,\ b_1 \ldots b_k \in \mathbb{R}:$

$M_i = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall j \in \{1 \ldots k\}: \ f(x_j) \in (a_j, b_j) \}.$

<u>Bem</u> <u>Cartesisches Produkt</u>

a) Seien (X_1, d_1), (X_2, d_2) metr. R.e

mehrere Möglkeiten, auf $X_1 \times X_2$ eine

Metrik zu definieren:

$$\tilde{d}\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=d_1(x_1,y_1)+d_2(x_2,y_2)$$

oder $$d\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=\sqrt{d_1(x_1,y_1)^2+d_2(x_2,y_2)^2}.$$

Beides sind Metriken auf $X_1\times X_2$.

b) $x_n \longrightarrow a$ in $(X_1\times X_2, d)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_{n1}\longrightarrow a_1 & \text{in } X_1 \text{ und}\\ x_{n2}\longrightarrow a_2 & \text{in } X_2\end{cases}$$

Bew: analog zu ÜA 13.

c) ebenso für $\tilde{d}$. Bew "$\Leftarrow$": $\tilde{d}(x_n,a)=\sum_{i=1}^{2} d_i(x_{ni},a_i)\xrightarrow{n\to 0} 0$

"$\Rightarrow$": $d_i(x_{ni},a)\leq \tilde{d}(x_n,a)\xrightarrow{n\to 0} 0.$ $\square$

Cauchyfolgen

Def 1.2.6 Sei X metr. R., eine Folge (x_n) in X heißt <u>Cauchyfolge</u>, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq N : \; d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Bem Das lässt sich in top. Räumen nicht definieren.

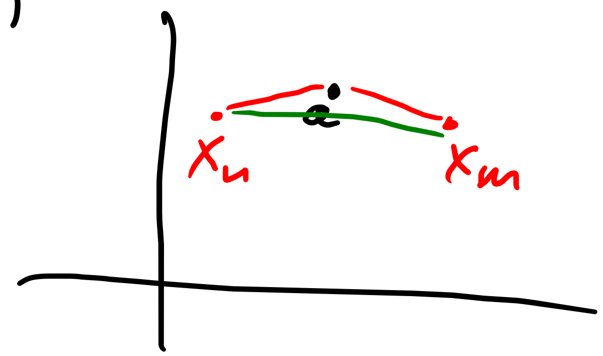
Prop. 1.27 Sei (x_n) Folge in metr. Raum X,

$$(x_n) \text{ konv } \Longrightarrow (x_n) \text{ ist Cauchyfolge.}$$

Bew Sei $a := \lim x_n$, dann $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N :$
$d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Daher $\forall n, m \geq N$:

$$d(x_n, x_m) \le d(x_n, a) + \underbrace{d(a, x_m)}_{= d(x_m, a)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$



<u>Def 1.28</u> a) Ein metr. Raum heißt <u>vollständig</u>, wenn in ihm jede Cauchyfolge konvergiert.

b) Ein vollst. normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt <u>Banachraum</u>.

<u>Prop</u> $(\mathbb{R}^{\cancel{m}\, p}, \|\cdot\|_2)$ ist vollst.

<u>Bew</u> Sei (x_n) Cauchyfolge in $\mathbb{R}^{\cancel{m}\, p}$. Wegen $|x_{ni} - x_{mi}| \le d(x_n, x_m)$ ist $(x_{ni})_n$ Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow x_{ni} \to a_i \Rightarrow x_n \to a$.

$\square$

Prop Sei (X,d) vollst., $Y \subset X$

(Y, d_{ind}) ist genau dann vollst., wenn Y abg.

Bew "$\Rightarrow$": Sei (Y, d_{ind}) vollst, (y_n) in Y, $y_n \to a \in X$

Dann (y_n) Cauchyfolge in X $\Rightarrow$ (y_n) Cauchy in Y

$\Rightarrow$ $y_n \to y \in Y$ $\Rightarrow$ $y_n \to y \in X$ $\Rightarrow$ $y = a$

$\Rightarrow$ $a \in Y$ $\Rightarrow$ Y abg.

"$\Leftarrow$": Sei Y abg., (y_n) ~~E~~ in Y Cauchyfolge

$\Rightarrow$ (y_n) Cauchy in X $\Rightarrow$ $y_n \to a$ in X

$\overset{Y\text{ abg}}{\Rightarrow}$ $a \in Y$, d.h. $y_n \to a$ in Y. $\square$

Bem Tats. auch wenn X nicht vollst. ist, gilt

(Y, d_{ind}) vollst. $\Rightarrow$ Y abg.

Bsp Seien $C[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$

und $\mathcal{P}[a,b] = \{ p : [a,b] \to \mathbb{R} \mid p \text{ Poly} \} \subset C[a,b]$

Jedes $f \in C[a,b]$ ist beschr., also $\exists \, \|f\|_\infty \in \mathbb{R}$

(" $\|f\|_\infty < \infty$ ")

Beh 2.20 ($(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ ist vollst.

($(\mathcal{P}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ ist nicht vollst.

Bew $C[a,b]$: Sei (f_n) Cauchyfolge in $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$.

Stets $|g(x)| \leq \|g\|_\infty \ \forall x \in [a,b]$, also ist $(f_n(x))$

Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $f_n(x) \longrightarrow f(x)$.

Wenn $\forall n,m \geq N$: $\|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$, dann $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

$$\downarrow m \to \infty$$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

Also $f_n \to f$ glm. Ana 1: Glm. Limes stetiger Fktnen ist stetig $\Rightarrow f \in C[a,b]$.

$\mathcal{P}[a,b]$: $\quad p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ ist Poly

$$p_n \to f, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ kein Poly.}$$

glm. auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (Potenzreihen konv. glm auf Kompakta im Konv.kreis) $\square$

<u>Merke</u> "In einem Banachraum kann man addieren, vervielfachen, Betrag und Limiten nehmen."