Bsp. f. Topologie, top. Raum

$$X = C[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$$

glm. Konv., punktw. Konv.

$\uparrow$ $\qquad\qquad\qquad$ $\uparrow$

Topologie 1, $\qquad$ Topologie 2

$$\mathcal{T}_1 = \{ Y \subset X : \forall f \in Y : \exists r > 0 : \forall g \in X : \text{ wenn } \|f-g\|_\infty < r, \text{ dann } g \in Y \}$$

$$\mathcal{T}_2 = \{ \bigcup_{i \in J} M_i : M_i = \{ f \in X \mid f(x_j) \in (a_j, b_j) \ \forall j = 1 \ldots k \} \}$$

$$d(f,g) = \|f-g\|_\infty$$

transl. inv: $d(f+h, g+h) = d(f,g)$

homogen: $d(\lambda f, 0) = |\lambda|\, d(f,0)$

$$\bigcup_{i\in J} M_i \cap \bigcup_{j\in J} M_j' = \bigcup_{i\in J}\bigcup_{j\in J} M_i \cap M_j' \in \mathcal{T}_2$$

$\Longrightarrow \mathcal{T}_2$ ist Top.

<u>Bsp</u>

- diskrete Top. $\Longleftarrow$ diskrete Metrik

  $d(x,y) = 1$ für $x \neq y$

  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$

- indiskrete Top.

  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$

Bsp Kontinuumslimes $\varepsilon \to 0$

$\mathbb{R}$

$\varepsilon\mathbb{Z}$ Diskretisierung

Konvexe Mengen

V Vektorraum

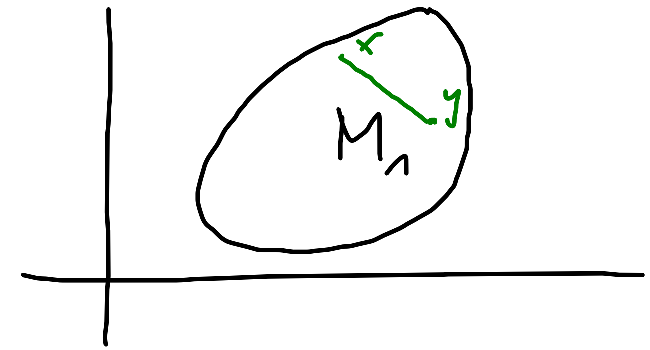
Strecke zwischen x und y $= \{ tx + (1-t)y \mid t \in [0,1] \}$

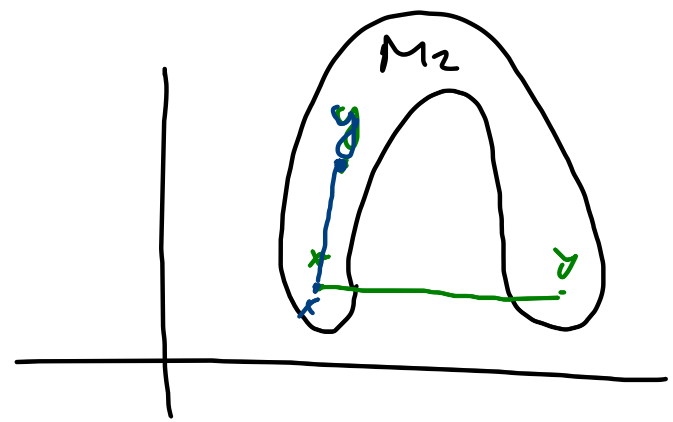
$y + t(x-y)$

Def $M \subset V$ heißt **konvex** $\iff$
$\forall x,y \in M : \forall t \in [0,1] : tx + (1-t)y \in M$.

Bsp $M_1 \subset \mathbb{R}^2$ konvex

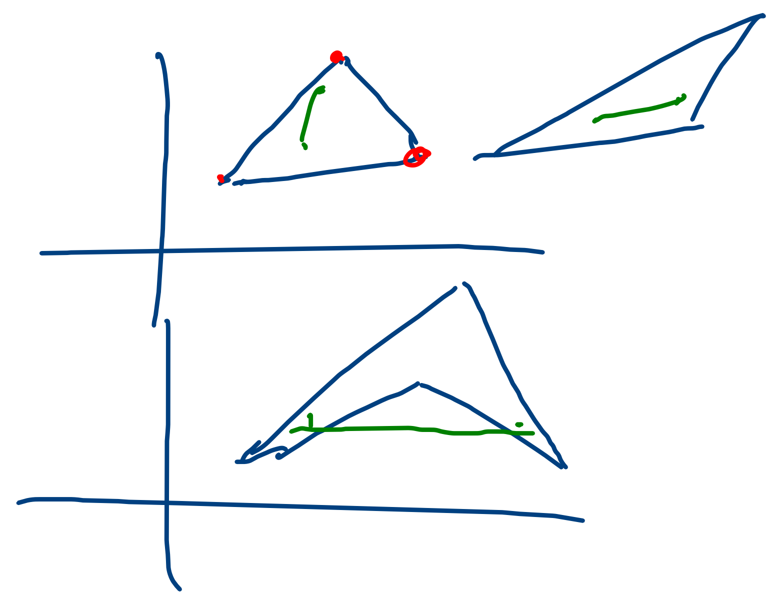
$M_2 \subset \mathbb{R}^2$ nicht konvex





Wahr oder falsch?

1) Alle offenen Dreiecke in $\mathbb{R}^2$ sind konvex. W



2) Vierecke F

3) Kreisscheiben W

4) Vollellipsen W

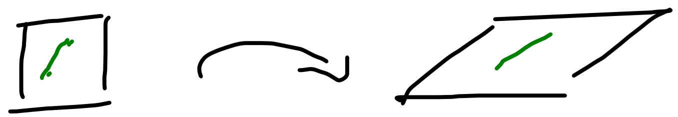
5) Wenn $M \subset \mathbb{R}^n$ konvex ist und $A \in M(n, \mathbb{R})$, dann ist $AM = \{Ax \mid x \in M\}$ konvex. W

6) Die Vereinigung 2er konvexer Mengen ist konvex. F

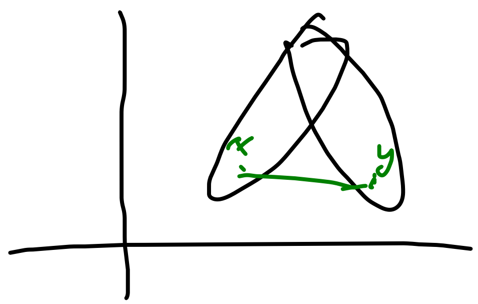
7) Der Schnitt 2er konvexer Mengen ist konvex. W

Bew 5)

$$AM \ni A\underbrace{\big(tx+(1-t)y\big)}_{\in M} = t\underbrace{Ax}_{\in AM} + (1-t)\underbrace{Ay}_{\in AM}$$

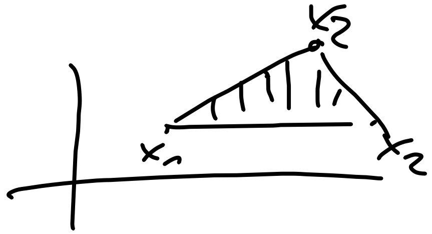


6)



7) $x,y \in M \cap M' \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x,y \in M \Rightarrow \overline{xy} \subset M \\ x,y \in M' \Rightarrow \overline{xy} \subset M' \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{xy} \subset M \cap M'$.

Dreieck: x_1, x_2, x_3



$$M = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \mid \alpha_i > 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1\}$$

Folgen

- konv. Folge: Sei X top. Raum. $x_n \to a \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$

  $\forall$ Umg U von $\cancel{A}$ a : $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : x_n \in U$.

  $\overset{X \text{ metr } R}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : d(x_n, a) < \varepsilon$

- Cauchyfolge (X metr. Raum). $(x_n) \Longleftrightarrow$

  $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N : \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$

- ~~Be~~ (X metr. R.), (x_n) beschränkt $\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$

  $\exists x_0 \in X\ \exists r > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \quad x_n \in B_r(x_0)$ [oder $d(x_0, x_n) < r$]

$\Longleftrightarrow \forall y_1 \in X\ \exists r_1 > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \quad x_n \in B_{r_1}(y_1)$

$$d(y_1, x_n) \leq \underbrace{d(x_n, x_0)}_{< r} + d(y_1, x_0) < r + d(y, x_0) =: r_1 .$$

Wahr oder falsch? (In bel. metr. R. X)

1) Jede konv. Folge ist Cauchyfolge. W
2) Jede Cauchyfolge ist beschr. W
3) Jede konv. Folge ist beschr. W
4) Jede Cauchyfolge ist konv. F
5) Jede beschr. Folge ist Cauchyf. F

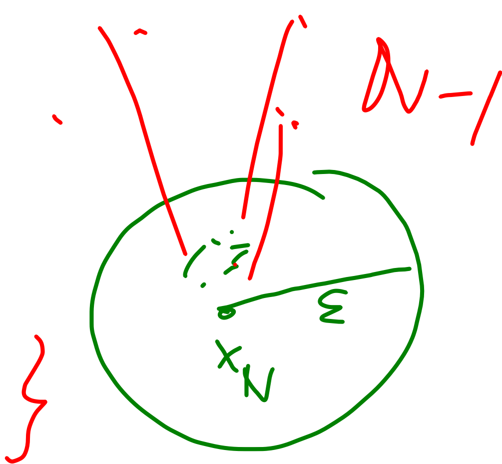
2) $\ln n$, $\quad \ln(n+1) - \ln(n) \longrightarrow 0$

$\ln(m) - \ln(n)$ nicht klein

Bew Wähle $\varepsilon > 0$, $\forall n,m \geq N: \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$

z.B. $\varepsilon = 1$ $\quad \Rightarrow d(x_N, x_m) < \varepsilon$

$r = \max\{ d(x_N, x_1) .. d(x_N, x_{N-1}), \varepsilon \}$

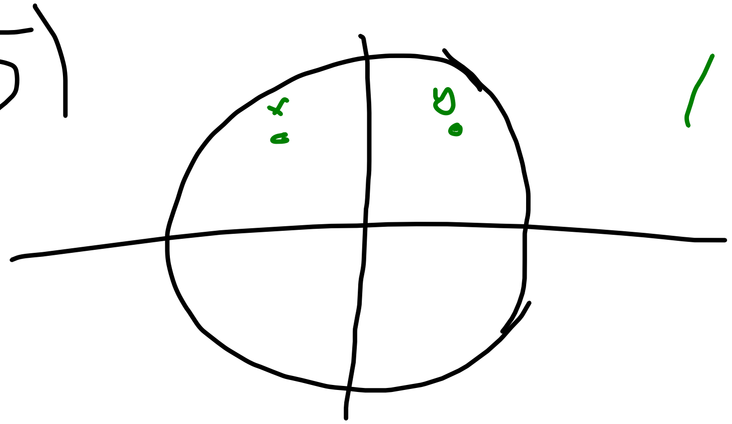


X heißt <u>vollst</u> $\iff$ jede Cauchyfolge konv.

<u>Bspe</u> unvollst. metr. Räume: $(\mathbb{Q}, d_{ind})$,

$$\underbrace{(\mathrm{Poly}[a,b], \|\cdot\|_\infty)}_{\text{unvollst.}} \subset \underbrace{(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)}_{\text{vollst.}}$$

5)



$(x, y, x, y, x, y, \ldots)$ nicht Cauchyfolge.