Äquivalente Normen

Def 1.30 2 Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ auf V heißen <u>äquivalent</u>, wenn $\exists c, C > 0 \; \forall x \in V$:

$$c\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C\|x\|_a .$$

Bem 1.31 Ist Äq.rel.

$$\left(\frac{1}{C}\|x\|_b \leq \|x\|_a \leq \frac{1}{c}\|x\|_b \right)$$

$$\left(\|x\|_c \leq C'\|x\|_b \leq C'C\|x\|_a . \right)$$

Prop 1.32 Seien $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ äq. Normen auf V

Für jedes $U \subset V$, jede Folge (x_n) in V, $\forall y \in V$:

a) U ist offen in $(V, \|\cdot\|_a) \iff U$ ist offen in $(V, \|\cdot\|_b)$

b) abg. $\iff$ abg.

c) $x_n \to y$ in $(V, \|\cdot\|_a) \iff x_n \to y$ in $(V, \|\cdot\|_b)$

d) (x_n) ist Cauchyfolge in $(V, \|\cdot\|_a) \iff (x_n)$ ist Cauchy in $(V, \|\cdot\|_b)$

e) $(V, \|\cdot\|_a)$ vollst. $\iff (V, \|\cdot\|_b)$ vollst.

Bew a) $\underbrace{B^a_\varepsilon(x_0) \supset B^b_{c\varepsilon}(x_0)}$ und $\underbrace{B^b_\varepsilon(x_0) \supset B^a_{\varepsilon/C}(x_0)}$

denn $\|x\|_b < c\varepsilon \implies \|x\|_a < \varepsilon$ denn $\|x\|_a < \frac{\varepsilon}{C} \implies \|x\|_b < \varepsilon$.

b) folgt aus a)

c) $x_n \to y$ in $(V, \|\cdot\|_a) \implies \|x_n - y\|_a \to 0 \implies$

$$\| x_n - y \|_b < C \| x_n - y \|_a \longrightarrow 0 \implies$$

$$x_n \to y \text{ in } (V, \| \cdot \|_b).$$

d) so ähnlich

e) folgt aus c) und d).

Kap 2: Stetigkeit

Notation: Für $f: A \to B$ und $U \subset A$ sei

$$f(U) := \{ f(a) \mid a \in U \} \subset B.$$

Def 2.1 Seien X, Y top. R.e, $a \in X$

$f: X \to Y$ heißt <u>folgenstetig</u> in a, wenn für ~~...~~ jede Folge (x_n) in X mit $x_n \to a$ gilt $f(x_n) \longrightarrow f(a)$ in Y.

f heißt <u>folgenstetig</u>, wenn f in jedem $a \in X$ folgenstetig ist.

__Notation__ "$\lim_{x \to a} f(x) = b$" $:\Longleftrightarrow$

für jede Folge (x_n) in $X \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$

gilt $f(x_n) \to b$ in Y.

__Folgerung__ f folgenstetig in $a \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

__Bew__ "$\Rightarrow$": klar (Folge in $X \setminus \{a\}$ ist Folge in X)

"$\Leftarrow$": Geg. Folge (x_n) in X, $x_n \to a$, oBdA nicht fast-konstant.

entferne Folgenglieder $x_k = a$, erhalte $(\tilde{x}_n)$ in $X \setminus \{a\}$,

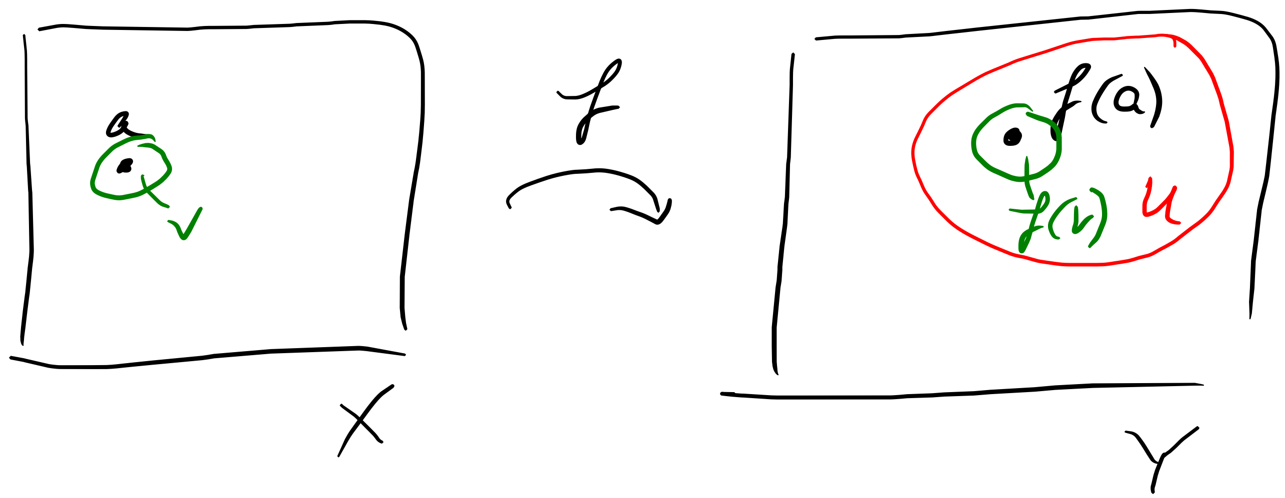
$\tilde{x}_n \to a$. Vor $\Rightarrow f(\tilde{x}_n) \xrightarrow{n \to \infty} f(a)$, also

auch $f(x_n) \to f(a) \Rightarrow f$ folgenstetig in a $\square$

Def 2.3 Seien X, Y top. R.e, $a \in X$

$f: X \to Y$ heißt <u>stetig in a</u>, wenn

$\forall$ Umg U von $f(a)$ $\exists$ Umg. V von a: $f(V) \subset U$.



$f: X \to Y$ heißt <u>stetig</u>, wenn sie in jedem $a \in X$ stetig ist.

Prop. 2.4 stetig in a $\Rightarrow$ folgenstetig in a
stetig $\Rightarrow$ folgenstetig

Bew Sei (x_n) in X mit $x_n \to a$

Zu zeigen: $\forall$ Umg U von $f(a)$ enthält fast alle $f(x_n)$.

f st $\Rightarrow$ $\exists$ Umg V von a : $f(V) \subset U$.

Wegen $x_n \to a$ liegen fast alle x_n in V, also fast alle $f(x_n)$ in U. $\square$

In metr. Räumen:

"ε-δ-Kriterium"

Prop. 2.5 Seien ~~$\mathfrak{X}$~~ X, Y metr. R.e und $a \in X$.

$f: X \to Y$ stetig in a $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X$: wenn $d(x,a) < \delta$, dann $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Bew „$\Rightarrow$": Für $U = B_\varepsilon(f(a))$ Umg. von $f(a)$

$\exists$ Umg. V von a: $f(V) \subset U$.

$\Rightarrow \exists \delta > 0$: $B_\delta(a) \subset V$. Also $f(B_\delta(a)) \subset f(V) \subset U$.

„$\Leftarrow$": ggg. U Umg. von $f(a)$, $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(a)) \subset U$.

Vor $\Rightarrow \exists \delta > 0$: $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset U$.

Setze $V := B_\delta(a)$. $\square$

Prop. 2.6 Seien X, Y metr. R.e, $a \in X$, $f : X \to Y$

f folgenstetig in a $\Rightarrow$ f stetig in a.

Bew Wäre f nicht stetig in a („ε-δ-stetig")

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 : f(B_\delta(a)) \not\subset B_\varepsilon(f(a))$

Setze $\delta := \frac{1}{n}$, wähle $x_n \in B_{1/n}(a)$, also $x_n \to a$

aber $f(x_n) \notin B_\varepsilon(f(a))$. Dann aber

$$f(x_n) \not\to f(a) \quad ↯ \qquad \square$$

Satz 2.7 Seien X, Y top. R.e, $f: X \to Y$.

$$f \text{ st} \iff \forall M \subset Y \text{ offen}: \underbrace{f^{-1}(M)}_{:=\{x \in X \mid f(x) \in M\}} \text{ ist offen in } X.$$

Bew "$\Longrightarrow$": Sei $M \subset Y$ offen, $a \in f^{-1}(M)$. Dann

$f(a) \in M \overset{f \text{ st}}{\Longrightarrow} \exists V$ Umg von a: $f(V) \subset M$,

also $V \subset f^{-1}(M)$, also ist a innerer Punkt von $f^{-1}(M)$. a bel. $\Longrightarrow f^{-1}(M)$ offen.

"$\Leftarrow$": Sei $a \in X$, U Umg. von $f(a)$.

$\exists M$ offen: $f(a) \in M$, $M \subset U$.

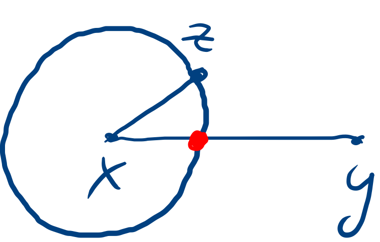
Setze $V := f^{-1}(M)$. Vor $\Rightarrow$ V offen, $a \in V$, $f(V) = M \subset U$. $\square$

Bsp.e 2.8 a) (X,d), $b \in X$, $d_b(x) := d(b,x)$

Abstandsfkt zu b, $d_b : X \to [0,\infty)$ st.

Bew Vorüberlegung:

$$d(x,y) \le d(y,z) + d(z,x) \Rightarrow \left.\begin{array}{c} d(x,y) - d(x,z) \le d(y,z) \\ \Downarrow\ y \leftrightarrow z \\ d(x,z) - d(x,y) \le d(y,z) \end{array}\right\} \Rightarrow$$



$$\boxed{|d(x,y) - d(x,z)| \le d(y,z)}$$

"umgekehrte Dreiecks-Ungl."

d_b folgenst: Wenn $x_n \to a \in X$, dann

$$\left| d_b(x_n) - d_b(a) \right| = \left| d(b, x_n) - d(b,a) \right| \leq \underbrace{d(x_n, a)}_{\substack{\downarrow\, n \to \infty \\ 0}}$$

also $d_b(x_n) \to d_b(a)$. $\square$

b) In $(V, \|\cdot\|)$ normierten R. ist $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ stetig (folgt aus a) für $b = 0$.) $d_b(x) = \|x\|$

c) norm. R. $(V, \|\cdot\|)$

add: $V \times V \to V$, $(x,y) \mapsto x+y$

mult: $\mathbb{K} \times V \to V$, $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$

Sind stetig bzgl. $\|(x,y)\| := \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ und $\|(\alpha, x)\| := \sqrt{|\alpha|^2 + \|x\|^2}$

Bew $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in $V \times V \Rightarrow$ $x_n \to x$
$y_n \to y$,

daher $\| \mathrm{add}(x_n, y_n) - \mathrm{add}(x,y) \|_V =$

$\| x_n + y_n - x - y \|_V$

$\leq \| x_n - x \|_V + \| y_n - y \|_V \xrightarrow{n \to \infty} 0$ & Prop. 2.6
$\Rightarrow$ add st.

So ähnlich mult. $\square$

d) X, Y, Z top. R.e, $f: Y \to Z$ st., $g: X \to Y$ st.,
dann ist $f \circ g : X \to Z$ st.

Bew $M \subset Z$ offen $\overset{f \text{ st}}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}(M) \subset Y$ offen $\overset{g \text{ st.}}{\Longrightarrow}$
$(f \circ g)^{-1}(M) = g^{-1}(f^{-1}(M))$ offen in X, Satz 2.7. $\Rightarrow$ $f \circ g$ st. $\square$

e) Sei X top. R., $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots, (X_k, d_k)$ metr. R.e

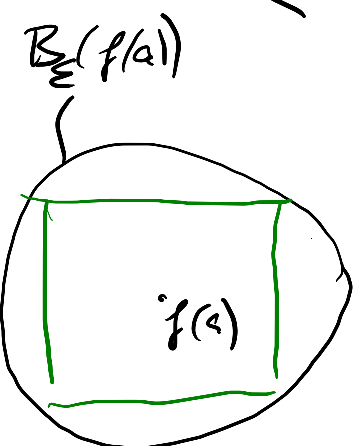
$$f: X \to \underbrace{X_1 \times \dots \times X_k}_{d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_k^2}}, \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$$

f ist st $\iff$ alle $f_i: X \to X_i$ st.

<u>Bew</u> "$\Rightarrow$": Projektion $X_1 \times \dots \times X_k \to X_i$
$(x_1, \dots, x_k) \mapsto x_i$ ist st.

(ε-δ-Kriterium mit $\delta = \varepsilon$) und d)

"$\Leftarrow$": Geg. Umg. U von $f(a)$, dann
$\exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(f(a)) \subset U$



$$\underset{\substack{\cup \\ f_1(V_1)}}{B_{\varepsilon/\sqrt{k}}(f_1(a))} \times \dots \times \underset{\substack{\cup \\ f_k(V_k)}}{B_{\varepsilon/\sqrt{k}}(f_k(a))} \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset U$$

f_i st $\Rightarrow$ $f_1(V_1)$ … $f_k(V_k)$, $V = V_1 \cap \dots \cap V_k$ Umg von a $\square$

f) X top. R., V norm. R., $f, g : X \to V$ st., $h : X \to \mathbb{K}$ st., dann

$$f+g,\ hg : X \longrightarrow V \text{ st.}$$

Bew $f+g = \text{add} \circ (f,g)$ und $hg = \text{mult} \circ (h,g)$

c), d), e) $\Rightarrow$ Beh. $\square$

Bsp e^{xy} st.

g) Def Seien X, Y metr. R.e, $f : X \to Y$ heißt

Lipschitz-stetig oder dehnungsbeschränkt, wenn

$$\exists L \in [0,\infty) : \forall x_1, x_2 \in X : \ d_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) \leq L\, d_X(x_1, x_2)$$

Bem Jede Lipschitz-st. Fkt ist stetig (ÜA), aber nicht umgekehrt (Rep.).