Bemerkungen zu Stetigkeit, Normen etc.

Def 2.9 a) top. R.e X, Y heißen **homöomorph**, falls $\exists$ Bij $f: X \to Y$: f st und f^{-1} st.

f heißt dann **Homöomorphismus**. (auch "Verformung").

b) isometrische metr. R.e (hatten wir)

c) normierte R.e V, W heißen **isometrisch isomorph**, falls $\exists A: V \to W$: A linear, bij. Isometrie d.h. $\|Av\|_W = \|v\|_V \ \forall v \in V$.

Bem 2.10

a) isometr. isomorph $\Rightarrow$ isometrisch $\Rightarrow$ homöomorph

normierte R.e metr. R.e top. R.e

b) f Homöom. bildet (in beiden Richtung)

konv. Folgen auf konv. Folgen ab

offen Mengen auf offene Mengen

abg. abg.

c) bij. Isometrie f bildet Cauchyfolgen auf Cauchyfolgen.

d) (X, d_X) isometrisch zu (Y, d_Y). Dann

$$X \text{ vollst} \Leftrightarrow Y \text{ vollst.}$$

Bsp 2.12 b) $\mathbb{C}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, y_i$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad x \in \mathbb{C}^n$$

Als metrische R.e sind $\mathbb{R}^{2n}$ und $\mathbb{C}^n$ isometrisch

$$d_{\mathbb{C}^n}(z,w) = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i - w_i|^2\right)^{1/2}$$

$J : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\quad z \mapsto (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n)$

ist bij. Isometrie.

Satz 2.13 Auf jedem endl.-dim. Vektorraum V über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ sind alle Normen äquivalent.

Bew: siehe Skript.

Korollar 2.15 Jeder endl.-dim. VR V über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist bzgl. jeder Norm vollst (also ein Banachraum).

Beweis Wähle Basis in V, liefert Isomorphismus $A : V \to \mathbb{R}^n$, def. $\|\cdot\|_A$ auf $\mathbb{R}^n$ durch $\|x\|_A := \|A^{-1}x\|_V$. $\|\cdot\|_A$ äq. zu $\|\cdot\|_2$, $\mathbb{R}^n$ vollst bzgl. $\|\cdot\|_2$ $\Rightarrow (V, \|\cdot\|_V)$ ist vollst. $\square$

Def 2.16 Sei X eine Menge, Y metr. Raum,

$f, f_n : X \to Y$

a) $f_n \to f$ punktweise $\iff$

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in X \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

b) $f_n \to f$ gleichmäßig $\iff$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall x \in X \ \forall n \geq N : d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

Satz 2.18 Sei X auch metr. Raum, jedes f_n st., $f_n \to f$ glm. Dann ist f st.

Bew Sei $x_k \xrightarrow{k\to\infty} a$ in X.

Zu zeigen: $f(x_k) \longrightarrow f(a)$.

Sei $\varepsilon > 0$. $f_n \to f$ glm $\Rightarrow$

$$\exists N \ \forall x : d_Y(f_N(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$f_N \text{ st} \Rightarrow \exists K \in \mathbb{N} \ \forall k \geq K : d_Y(f_N(x_k), f_N(a)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Also

$$d_Y(f(x_k), f(a)) \leq \underbrace{d_Y(f(x_k), f_N(x_k))}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d_Y(f_N(x_k), f_N(a))}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d_Y(f_N(a), f(a))}_{< \frac{\varepsilon}{3}}$$

$$< \varepsilon \quad \forall k \geq K$$

$\square$

Korollar 2.20 Sei (X, d_X) metr. Raum, $(Y, \|\cdot\|)$ Banachraum,

$$C(X,Y) = \{ f : X \to Y \mid f \text{ beschr. und st.} \}$$

Dann ist $(C(X,Y), \|\cdot\|_\infty)$ ist vollst. (also ein Banachraum).

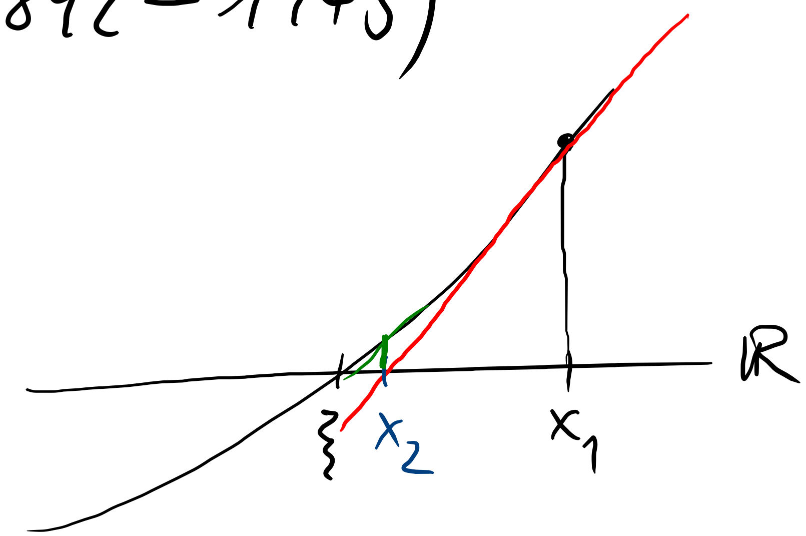
Bew analog zu $C([a,b], \mathbb{R})$.

Fixpunktsatz von Banach (1922)

Stefan Banach (1892–1945)

- verallgemeinert

  1) Newton-Verfahren



  2) Picard-Verfahren

- betrifft Iterationsfolgen

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad x_1 \text{ gg.}$$

Wir wissen: wenn $\exists \lim x_n =: a$

und f st, dann

$$a = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(a)$$

d.h. a ist Fixpunkt

2.22 Fixpunktsatz von Banach

Sei (X,d) vollst. metr. R., $f: X \to X$ eine <u>Kontraktion</u>, d.h. $\exists\, \vartheta \in (0,1)\ \forall x,y \in X$:

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq \vartheta\, d(x,y).$$

Dann hat f genau einen Fixpunkt $a \in X$, d.h. $f(a) = a$ für genau ein $a \in X$.

<u>Korollar</u> Wenn $A \subset X$, A abg., X vollst., $f: A \to A$ Kontraktion, dann $\exists_1$ Fixpunkt $a \in A$.

<u>Bew</u> <u>Eind:</u> Wenn $f(a) = a$ und $f(b) = b$, dann

$$d(a,b) = d\big(f(a), f(b)\big) \leq \vartheta\, d(a,b) \implies d(a,b) = 0$$
$$\implies a = b.$$

Ex Sei $x_0 \in X$ bel., Iterationsfolge

$$x_{n+1} := f(x_n).$$

Wenn konv. $x_n \to a$, dann (weil f Lipschitz $\Longrightarrow f$ st)

$$a = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(a).$$

Zeigen: (x_n) Cauchyfolge.

1) (x_n) beschr.

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_0)$$

$$\leq \underbrace{d(x_n, x_{n-1})} + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots + d(x_1, x_0)$$

$$\leq \underbrace{\theta\, d(x_{n-1}, x_{n-2})} + \ldots$$

$$\leq \theta^n\, d(x_1, x_0) + \theta^{n-1} d(x_1, x_0) + \ldots + d(x_1, x_0)$$

$$= \frac{1-\theta^{n+1}}{1-\theta}\, d(x_1, x_0) \leq \frac{1}{1-\theta}\, d(x_1, x_0) =: M$$

2) Daher $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_0) + d(x_0, x_n)$

$$\leq 2M \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

3) Sei $\varepsilon > 0$, $m, n \geq n_0$

$$d(x_n, x_m) = d\big(f(x_{n-1}), f(x_{m-1})\big)$$
$$\leq \theta\, d(x_{n-1}, x_{m-1})$$
$$\leq \theta^{n_0} d(x_{n-n_0}, x_{m-n_0})$$
$$\leq \theta^{n_0} 2M < \varepsilon$$

für $n_0 = n_0(\varepsilon)$ groß genug

$$n_0 > \frac{\log \varepsilon - \log(2M)}{\log \theta}.$$

$\square$

Kap 3: Kompaktheit

Def 3.1 Sei X top R., $Y \subset X$

a) Eine Familie $U_i \subset X$, $i \in J$, heißt <u>offene Überdeckung von Y</u>, wenn jedes U_i offen ist und

$$Y \subset \bigcup_{i \in J} U_i .$$

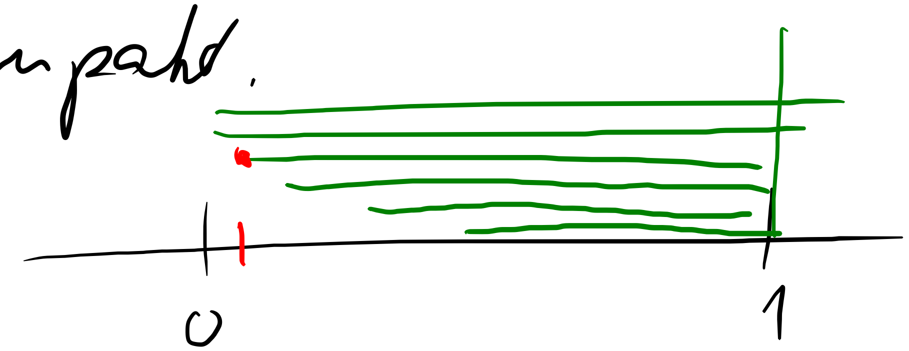
b) $K \subset X$ heißt <u>kompakt</u>, wenn gilt:
Zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in J}$ von K $\exists$ endl. Teilüberdeckung, d.h. $\exists i_1, \ldots, i_n \in J$:

$$K \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n} .$$

Bsp.e 3.2 a) Jede endl. Teilmenge $K=\{x_1,\dots,x_n\}$ eines top. R.es X ist kompakt.

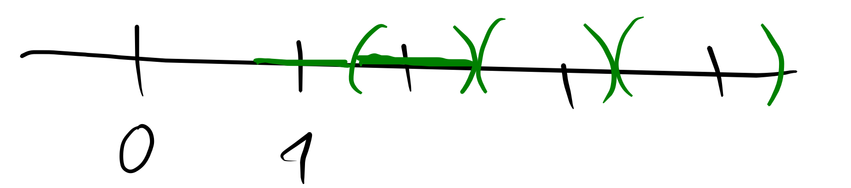
b) $(0,1)\subset\mathbb{R}$ ist nicht kompakt.

$$(0,1)=\bigcup_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n},1\right)$$



c) $\mathbb{N}\subset\mathbb{R}$ ist nicht kompakt.

$$\mathbb{N}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2},\,n+\frac{1}{2}\right)$$



$\nexists$ endl. Teilüberdeckung

~~d)~~ .