Limiten in $\mathbb{R}^d$.

Rechenregeln: In $\mathbb{R}^d$ (Eukl. Norm) gelte $x_n \to x$, $y_n \to y$. Dann

a) $x_n + y_n \longrightarrow x + y$

b) $\lambda x_n \longrightarrow \lambda x$

c) wenn $\lambda_n \to \lambda$ in $\mathbb{R}$, dann $\lambda_n x_n \longrightarrow \lambda x$

d) $x_n \cdot y_n \longrightarrow x \cdot y$

e) jede Teilfolge $(x_{n_k})_k$ konv. gegen x

f) $x_n \longrightarrow x$ in jeder anderen Norm

g) $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$ (Eukl. Norm oder jede andere)
(d.h. $\|\cdot\|$ st.)

h) wenn $x \neq 0$, dann sind fast alle $x_n \neq 0$ und $\frac{x_n}{\|x_n\|} \longrightarrow \frac{x}{\|x\|}$

i) wenn $\|z_n\| \longrightarrow 0$, dann $z_n \longrightarrow 0$

j) wenn $\|z_n - x_n\| \longrightarrow 0$, dann $z_n \to x$

<u>Bew</u> a) - e) z.B. komponentenweise

a) $\|(x_n+y_n)-(x+y)\| \leq \underbrace{\|x_n-x\|}_{\to 0} + \underbrace{\|y_n-y\|}_{\to 0} \longrightarrow 0$

f) In $\mathbb{R}^d$ sind alle Normen äq.

Äq. Normen haben dieselben konv. Folgen.

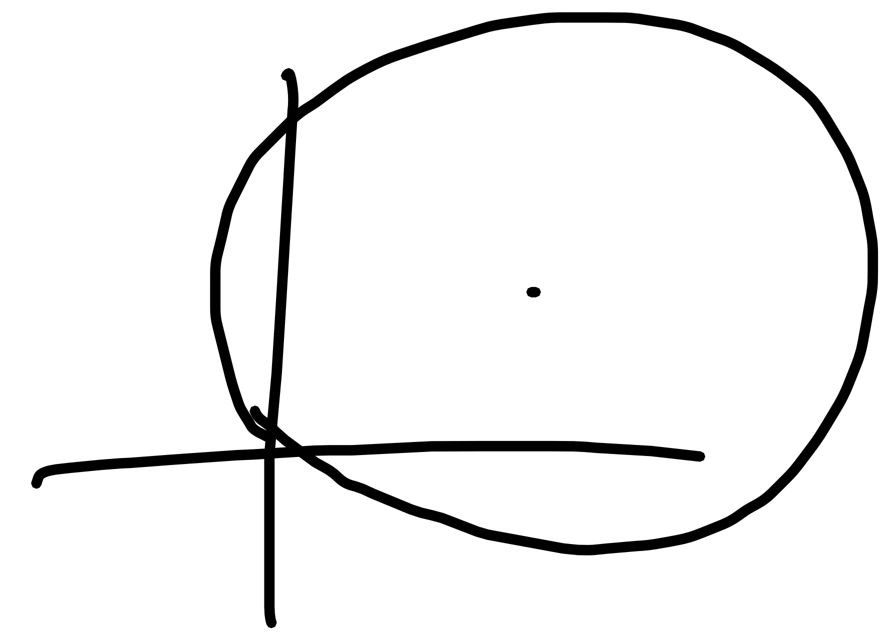
g) $\|x_n\| \leq \underbrace{\|x_n - x\|}_{\to 0} + \|x\| \longrightarrow \|x\| \implies \limsup_n \|x_n\| \leq \|x\|$

$\cancel{\|x_n\|}$ $\|x\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n\| \implies \|x_n\| \geq \|x\| - \|x_n - x\| \longrightarrow \|x\|$

$$\Rightarrow \liminf_n \|x_n\| \geq \|x\|$$

$$\Rightarrow \|x_n\| \longrightarrow \|x\|.$$

h) $\dfrac{x_n}{\|x_n\|}$



$B_{\|x\|}(x) \not\ni 0$, aber

fast alle $x_n \in B_{\|x\|}(x)$

nutze f) und c) für $\lambda_n = \dfrac{1}{\|x_n\|}$.

i) Def.

j) $\|z_n - x_n\| \longrightarrow 0 \quad \xRightarrow{i)} \quad z_n - x_n \longrightarrow 0$

$$\Rightarrow \quad z_n = \underbrace{(z_n - x_n)}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{x_n}_{\longrightarrow x} \quad \xRightarrow{e)} \quad x.$$

Dividende der Allgemeinheit

In $M(d,\mathbb{R})$ ist $A_n \longrightarrow A$ definiert

(" $\cong \mathbb{R}^{d^2}$, oder norm. R.

z. B. $\|A\|_2 := \sqrt{\mathrm{Spur}(A^t A)}$

$\|A\|_{op} := \max_i \{|\lambda_i|$)

k) ~~…~~ $a_{nij} \longrightarrow a_{ij}$ in $\mathbb{R}$

l) $A_n B_n \longrightarrow A B$ falls auch $B_n \to B$

m) wenn A inv.bar, dann sind fast alle A_n inv.bar, und $A_n^{-1} \longrightarrow A^{-1}$. (Beweis später)

<u>Bew</u> k) l) z. B. komponentenweise.

Banach-Fixpunktsatz

X vollst. metr. R.

$f: X \to X$ Lipschitzkonst. $\theta < 1$

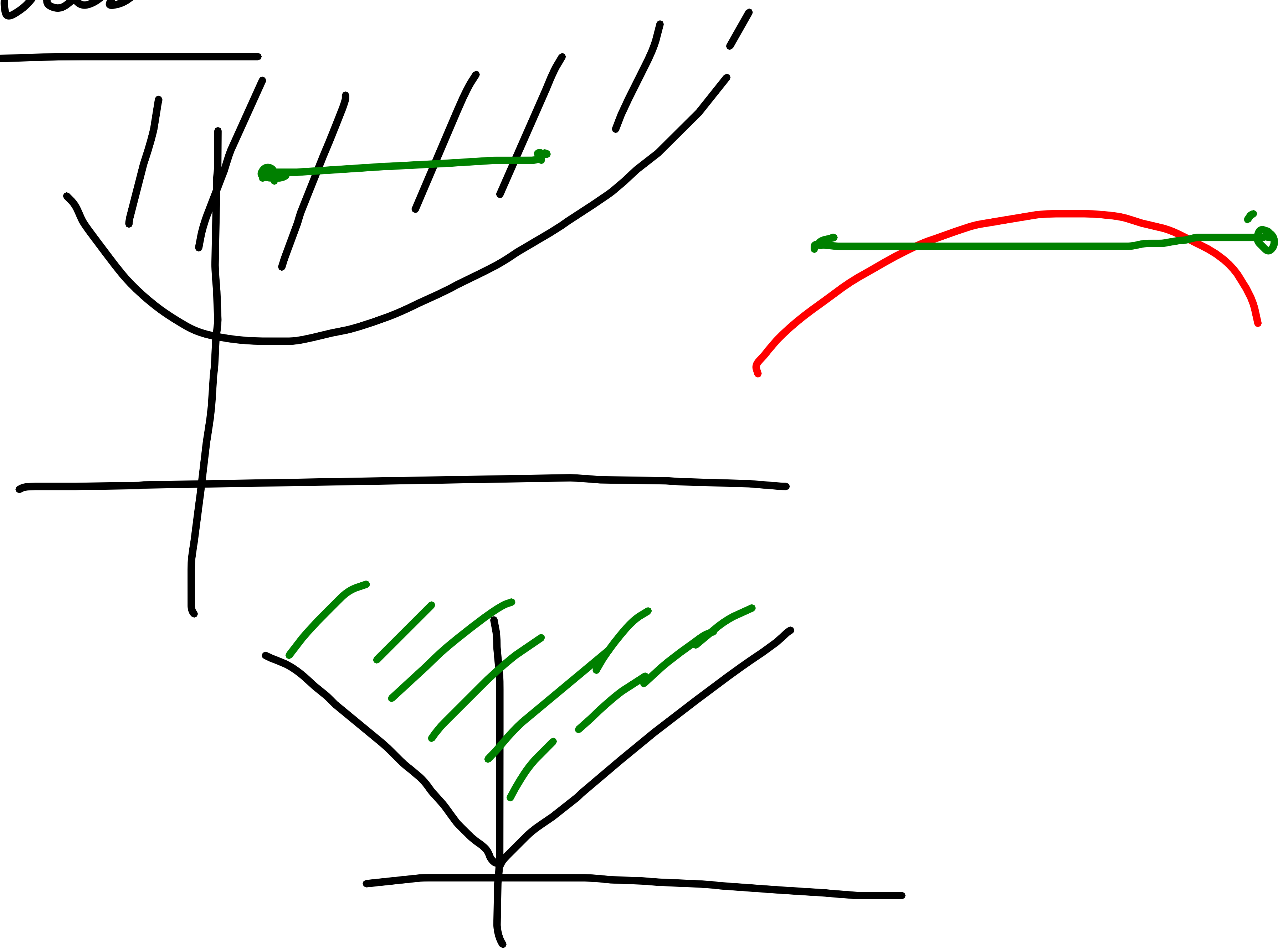
Iterationsfolge $x_{n+1} = f(x_n)$ konv $\forall x_0 \in X$

$\Rightarrow$ $a := \lim x_n$ ist Fixpkt.

a ist eind. Fixpunkt von f.

Konvexe Flächen

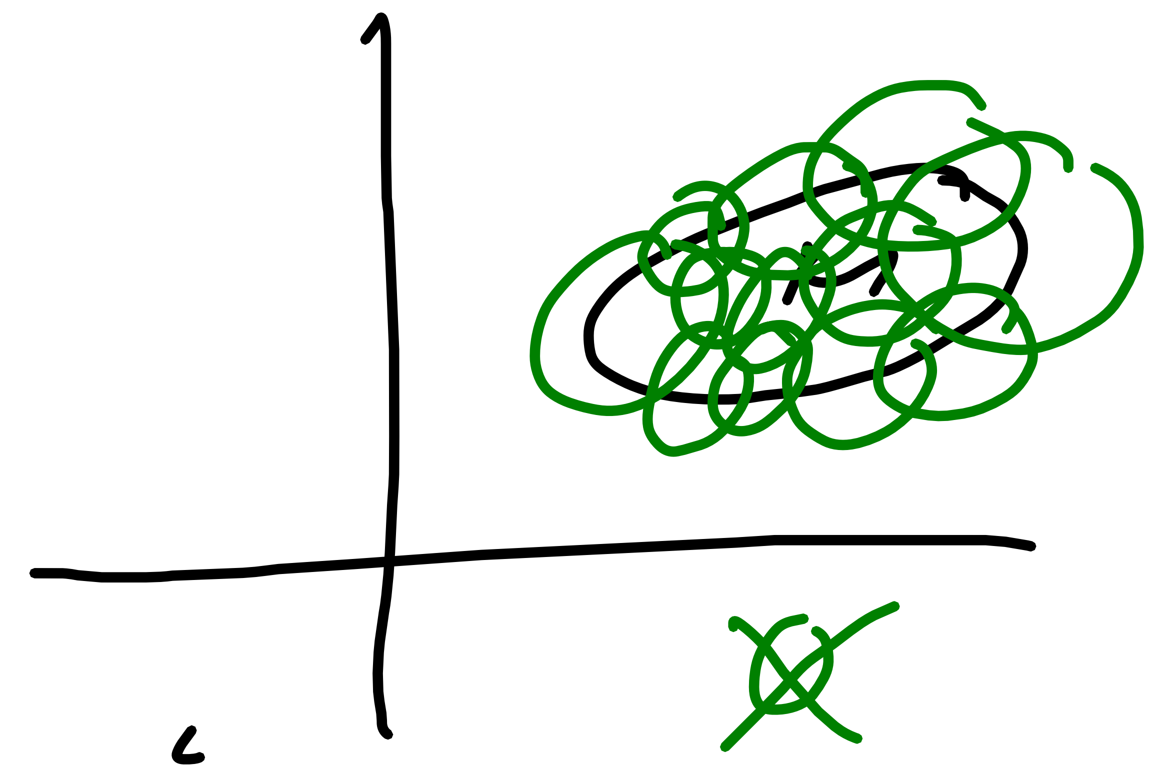
Def



offene Überdeckungen

offen

$$M \subset \bigcup_{i \in J} U_i$$



Df M kompakt $\Leftrightarrow$ jede offene Üb. enthält endl. Teilüb.

Stetige Funktionen

Verschiedene Def.en für Stetigkeit von $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

a) Folgenstetig: $\forall$ konv. Folge (x_n) mit $x_n \to a$:
$f(x_n) \to f(a)$

b) ε-δ: $\forall x \in \mathbb{R}^m \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x' \in \mathbb{R}^m$:
wenn $\|x - x'\| < \delta$, dann $\|f(x) - f(x')\| < \varepsilon$.

c) ε-δ mit $\leq$:

$\leq \delta$ $\qquad\qquad\qquad$ $\leq \varepsilon$

d) Umgebung: $\forall$ Umg U von jedem $f(x)$ existiert
Umg. V von x mit $f(V) \subset U$.

<u>Bsp</u> top. Re X, Y, $f : X \to Y$ folgenst., aber nicht st.

$Y = (\mathbb{R}, \|\cdot\|_{\text{Eukl}})$

$X = \mathbb{R}$ mit "co-abzählbarer" Topologie

$U \in \mathcal{T} \iff U^c$ abzählbar

$x_n \to x \iff x_n = x$ für fast alle x

$f(x) = x$

folgenstetig, denn $x_n \xrightarrow{X} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{Y} x$

nicht stetig, denn $f^{-1}((0,1)) = (0,1) \notin \mathcal{T}$.

e) Urbilder offener Mengen sind offen.

<u>Häufungspunkte</u> In top R. X

<u>Def</u> a HP von $(x_n) \iff$ in jeder Umg U von a liegen ∞ viele x_n

In top. R. X:

<u>Beh</u> a HP von $(x_n) \Leftarrow \exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_k$ mit $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} a$

<u>Bew</u> In jeder Umg U von a fast alle x_{n_k} liegen $\Rightarrow$ ∞ viele $x_n \in U$. $\square$

In metr. R. X:

<u>Beh</u> a HP von $(x_n) \Rightarrow \exists$ Teilfolge $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} a$

<u>Bew</u> Wähle $x_{n_k} \in B_{1/k}(a) \Rightarrow x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} a$. $\square$

~~Bsp $X = \mathbb{R}$ mit co-abzb. Topologie~~

~~(x_n) konv $\Longleftrightarrow$ fast konstant~~

~~$x_n = \frac{1}{n}$~~