Kompakte Mengen

Wdh Def: ~~X~~ X top. R., $K \subset X$

K heißt **kompakt** $\iff$ jede offene Überdeckung $\bigcup_{i \in J} U_i \supset K$ enthält eine endl. Teilüberdeckung.

Bsp 3.2 d) $x_n \to a$ in X

$K := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\} \subset X$

ist kompakt.

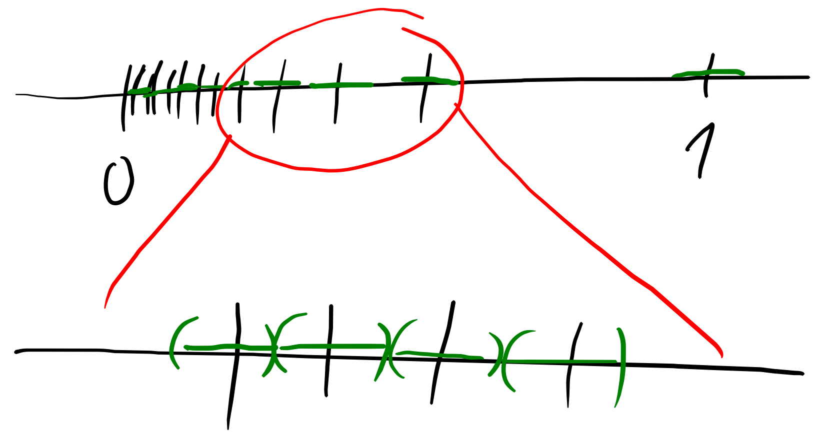
Bew: Sei $(U_i)_{i \in J}$ eine offene Üb. von K

Wähle i_0 mit $a \in U_{i_0}$. Fast alle $x_n \in U_{i_0}$ ... $\square$

e) ohne a i. allg. nicht kompakt, z.B.

$Y = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \} \subset \mathbb{R}$ nicht kompakt:

<u>Bew:</u>



$$Y \subset \left(\frac{3}{4}, 2\right) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) \;\; \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\right)$$

$\nexists$ endl. Teilüb. $\square$

3.3 Satz von Bolzano-Weierstraß

Bernard Bolzano (1781-1848)

Karl Weierstraß (1815-1897)

Sei X top.R., $K \subset X$ kompakt. Jede Folge in K besitzt einen HP in K.

<u>Bew</u> Sei $x_n \in K$.

<u>Zu zeigen</u>: $\exists\, a \in K : \forall$ Umg U von a:

U enth. ∞ viele x_n.

Gäbe es keinen HP, dann $\forall a \in K\ \exists$ Umg U_a von a:

U_a ~~enth~~ enth. nur endl. viele x_n. O.B.d.A. U_a offen

Klar: $K \subset \bigcup_{a \in K} U_a$

K kompakt $\Rightarrow \exists\, a_1 \ldots a_n \in K : K \subset U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_n}$

$\Rightarrow K$ enth. nur endl. viele Folgenglieder $\lightning$ $\square$

Bem 3.4 (ohne Beweis)

Sei $K \subset X$ metr. R. Wenn jede Folge in K einen HP in K hat, dann ist K kompakt.

Satz 3.5 Seien X, Y top. R.e, $f: X \to Y$ st, Wenn $K \subset X$ kompakt, dann ist $f(K)$ kompakt.

Bew Sei $f(K) \subset \bigcup_{i \in J} V_i$ offene Üb. $\overset{f \text{ st.}}{\Longrightarrow} U_i := f^{-1}(V_i)$ offen. $K \subset \bigcup_{i \in J} U_i$ offene Üb $\xrightarrow{K \text{ komp.}} K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$

$$\Longrightarrow f(K) \subset f(U_{i_1}) \cup \dots \cup f(U_{i_n}) = V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n} \quad \square$$

Def 3.6 Sei X metr. R. $(X \neq \emptyset)$

a) $B \subset X$ heißt beschränkt, wenn

$\exists C \in \mathbb{R}\ \forall x, y \in B : d(x,y) \leq C$.

b) Der Durchmesser von $Y \subset X$ $(Y \neq \emptyset)$ ist

$$\operatorname{diam}(Y) := \sup\{d(x,y) \mid x, y \in Y\} \in [0, \infty]$$

Bem a) Äq. sind: (i) B beschr.

(ii) $\forall x_0 \in X\ \exists r \in \mathbb{R} : B \subset B_r(x_0)$

(iii) $\exists x_0 \in X\ \exists r \in \mathbb{R} : B \subset B_r(x_0)$

Bew (i) $\Rightarrow$ (ii): Wenn $B = \emptyset$, dann $B \subset B_r(x_0)\ \forall x_0, r$.

Wenn $B \neq \emptyset$, wähle $x \in B$, setze $r := C + d(x, x_0) + 1$

$$\forall y \in B : d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y)$$
$$\leq d(x_0, x) + C < r.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Klar.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Setze $C := 2r$.

$\forall x, y \in B: \quad d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0,y)$

$< \quad r \quad + \quad r \quad = 2r = C.$ $\square$

b) B beschr. $\Leftrightarrow$ $\operatorname{diam}(B) < \infty$.

<u>Bew</u> "$\Rightarrow$": $\operatorname{diam}(B) \leq C \in \mathbb{R}$

"$\Leftarrow$": $C := \operatorname{diam}(B)$ $\square$

c) Sei V norm. R., $B \subset V$.

B beschr $\Leftrightarrow$ $\sup\limits_{v \in B} \|v\| < \infty$.

<u>Bew</u> "$\Rightarrow$": a) ii) mit $x_0 = 0$.

"$\Leftarrow$": a) iii) mit $x_0 = 0$, $r = \sup\limits_{v \in B} \|v\| + 1$. $\square$

Satz 3.7 Sei X metr. R. Wenn $K \subset X$ kompakt, dann ist K abg. und beschr.

Bew **beschr:** Sei $p \in X$ bel., fest. $U_n := B_n(p)$ offene Üb. von K (sogar von X)

$\overset{K \text{ komp.}}{\Longrightarrow}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}: K \subset U_1 \cup \ldots \cup U_{n_0} = U_{n_0} = B_{n_0}(p)$

$\Longrightarrow$ beschr.

abg: $x_n \to a \in X$, $x_n \in K$

Bolzano-Weierstraß $\Longrightarrow$ $\exists$ HP $b \in K$ $\Longrightarrow a = b$

$\Longrightarrow a \in K$.

$\square$

Prop 3.9 Sei X top. R., $K \subset X$ kompakt, $A \subset K$ abg. Dann ist A kompakt.

Bew Sei $(U_i)_{i \in J}$ offene Üb. von A.

Füge $U := X \setminus A = A^c$ (offen) hinzu, erhalte offene Üb von K (sogar von X)

$$\overset{K \text{ komp.}}{\Longrightarrow} \quad K \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n} \cup U$$

$$\overset{A \subset K \setminus U}{\Longrightarrow} \quad A \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n} \qquad \square$$

3.10 Satz von Heine-Borel

$K \subset \mathbb{R}^n$. K kompakt $\Longleftrightarrow$ K abg. und beschr.

Bew: später.

Bsp: In ∞-dim norm. R. V kann $M \subset V$ abg., beschr. nicht kompakt sein. (ÜA)

<u>Korollar 3.11</u> Sei V endl-dim norm. R., $K \subset V$

K kompakt $\Leftrightarrow$ K abg. und beschr.

<u>Bew</u> Äq. der Normen, Isomorphie zu $\mathbb{R}^n$. $\square$

<u>Prop. 3.12</u> (Schachtelungs~~…~~prinzip)

Sei X vollst. metr. R., $\emptyset \neq A_n \subset X$ abg. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$A_{n+1} \subset A_n$, $\operatorname{diam}(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Dann $\exists_1 a \in X$:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{a\}.$$

<u>Bew</u> <u>Eind</u>: Sei $a, b \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dann $d(a,b) \leq \operatorname{diam}(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow d(a,b) = 0 \Rightarrow a = b$.

Ex Wähle $x_n \in A_n$.

(x_n) ist Cauchyfolge: Sei $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\mathrm{diam}(A_{n_0}) < \varepsilon$. $\forall n, m \geq n_0$:

$d(x_n, x_m) < \varepsilon$, weil $x_n \in A_n \subset A_{n_0}$, $x_m \in A_m \subset A_{n_0}$

$\overset{X \text{ vollst.}}{\Longrightarrow}$ $x_n \longrightarrow a \in X$. Da $\forall k \geq n$: $x_k \in A_n$ und A_n abg., gilt $a \in A_n$.

Also $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ $\square$

Satz 3.13 Sei $R > 0$. $W_R := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq R \} = [-R, R]^n$ ist kompakt.

Bew s. Skript. (benutzt 3.12)

<u>Bew</u> des Satzes von Heine-Borel:

komp. $\overset{\text{in } \mathbb{R}^n}{\Longleftrightarrow}$ abg. und beschr.

„$\Rightarrow$": Satz 3.7 in metr. R.

„$\Leftarrow$": Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ abg und beschr.

Dann $\exists R > 0: \; K \subset W_R$

W_R komp. (3.13), K abg $\overset{\text{Satz 3.9}}{\Longrightarrow}$ K komp. $\square$

3.14 Satz von Weierstraß

Sei X top. R., $\emptyset \neq K \subset X$ komp., $f: K \to \mathbb{R}$ st,

dann nimmt f Max. und Min. an, d.h.

$$\exists a \in K: \quad f(a) = \sup_{y \in K} f(y) = \max_{y \in K} f(y)$$

$$\exists b \in K: \quad f(b) = \inf_{y \in K} f(y) = \min_{y \in K} f(y)$$

__Bew__ Sei $c := \sup_{y \in K} f(y) \in (-\infty, \infty]$

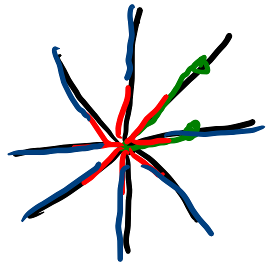
$\Rightarrow \exists (x_n)$ in K: $f(x_n) \longrightarrow c$.

$\xRightarrow{K \text{ komp}, B-W}$ $\exists$ HP $a \in K \xRightarrow{f \text{ st.}}$ $f(a)$ ist HP von $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$,

während $f(x_n) \longrightarrow c$ $\Longrightarrow$ $(c < \infty)$ $f(a) = c$

$(c = \infty)$ $\lightning$

Ebenso für inf. $\square$

Bsp $X =$  $\subset \mathbb{R}^n$ "franz. Eisenbahn"

$d =$ Entf. entlang X

$$X = \bigcup_{k\in K} \underbrace{\{ s v_k \mid 0 \le s \le 1\}}_{S_k}, \quad \|v_k\| = 1 \text{ in } \mathbb{R}^n$$

Beh X komp $\iff$ K endl.

Bew "$\Leftarrow$": Jede Strecke S_k ist kompakt

$\Rightarrow$ $X \subset \bigcup_{i\in J} U_i$, dann $S_k \subset \bigcup_{i \in J} U_i$

$\Rightarrow$ $\exists$ endl. Teilüb. $S_k \subset U_{i_{k1}} \cup \dots \cup U_{i_{k n_k}}$

zus. endl. Teilüb. von X.

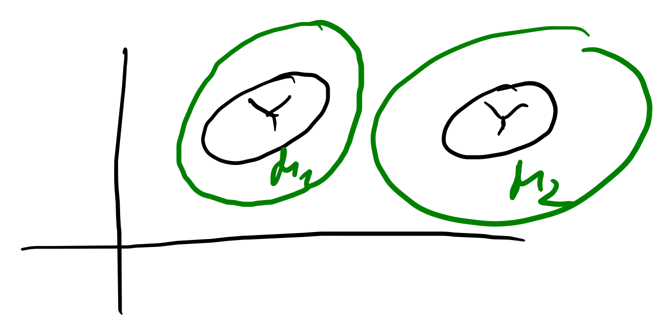
"$\Rightarrow$": Wenn K unendl., dann ist

$X \subset U_0 \cup \bigcup_{k\in K} U_k$, $U_0 = \bigcup_{k\in K} \{ s v_k \mid 0 \le s < \frac{1}{2} \}$, $U_k = \{ s v_k \mid \frac{1}{3} < s \le 1 \}$

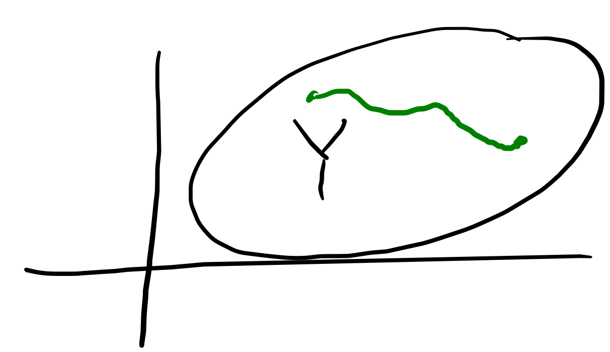
keine endl. Teilüb. $\square$

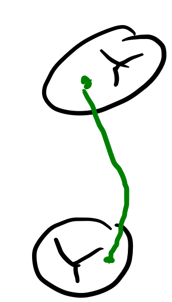
Def 3.16 Sei X top. R.,

a) $Y \subset X$ heißt <u>zusammenhängend</u>, falls es keine offenen Mengen $\underset{\neq \emptyset}{M_1}, \underset{\neq \emptyset}{M_2} \subset X$ gibt mit $M_1 \cap Y \neq \emptyset$, $M_2 \cap Y \neq \emptyset$ und $M_1 \cap M_2 \cap Y = \emptyset$ und $Y \subset M_1 \cup M_2$.



b) $Y \subset X$ heißt <u>wegzusammenhängend</u>, falls $\forall x_0, x_1 \in Y$ $\exists$ st. $f : [0,1] \to X$ mit $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$, $f([0,1]) \subset Y$.





Bem a) wegzus $\Rightarrow$ zus., aber nicht umgekehrt

(Bew s. Skript)

b) Sei $Y \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Y wegzus. $\Leftrightarrow$ Y zus.

(Bew. s. Skript).

c) $Y \subset V$ norm. R.,

Y konvex $\Rightarrow$ Y wegzus.