Wdh Def Y zusammenhgd.

$\Leftrightarrow \nexists$ offene Mengen M_1, M_2:

$$Y \subset M_1 \cup M_2,\ Y \cap M_1 \cap M_2 = \emptyset$$

Y wegzshg.

$\Leftrightarrow \forall x_0, x_1 \in Y\ \exists$ st. $f: [0,1] \to X$:

$$f(0) = x_0,\ f(1) = x_1,\ f([0,1]) \subset Y.$$

Satz 3.18 Seien X, Y top. Re, $f: X \to Y$ st.

Wenn $A \subset X$ wegzus., dann ist $f(A)$ wegzshg.

Bew Seien $y_0, y_1 \in f(A)$, wähle $x_0 \in f^{-1}(y_0) \cap A$, $x_1 \in f^{-1}(y_1) \cap A$, A wegzus. $\Rightarrow \exists$ st. $g: [0,1] \to A$, $g(0) = x_0$, $g(1) = x_1$. Also $f \circ g: [0,1] \to Y$,

$f(g(0)) = y_0,\ f(g(1)) = y_1,\ f \circ g([0,1]) \subset f(A).$

Also $f(A)$ wegzus. $\square$

Def 3.22 X metr. R, $U \subset X$

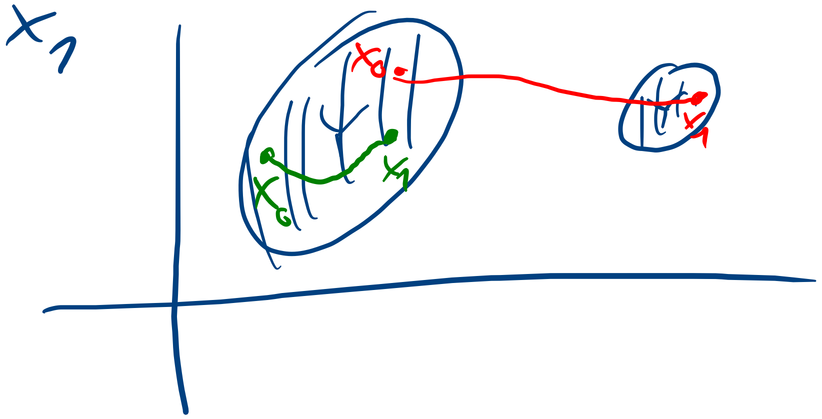
U <u>Gebiet</u> $\Longleftrightarrow$ $\emptyset \neq U$ offen und wegzus.

Prop. und Def Sei X top. R., $Y \subset X$

Die Rel. auf Y

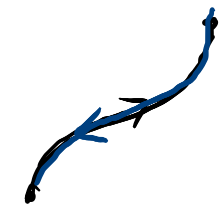
$$x_0 \sim x_1 \Longleftrightarrow \exists \text{ st. } f : [0,1] \to Y : \quad f(0) = x_0,\ f(1) = x_1$$

ist Äq.rel. Die Äqklassen heißen die <u>Zusammenhangskomponenten von Y.</u>

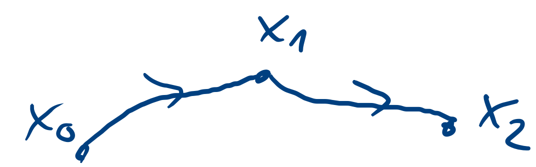


Bew

refl. $f(t) = x_0$



symm. $g(t) = f(1-t)$



transitiv.

$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{für } t \in [0, \tfrac{1}{2}] \\ g(2t-1) & \text{für } t \in [\tfrac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

überprüfen: h st. bei $t = \frac{1}{2}$ $\square$

Kap. 4: Differenzierbarkeit

Hatten: $$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}}$$ für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

existiert auch für $f: \mathbb{R}^n \to W$

$(W, \|\cdot\|)$ norm. R.

$$\partial_i f(\underline{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x} + h\underline{e}_i) - f(\underline{x})}{h}$$

Notation Nabla-Operator $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$

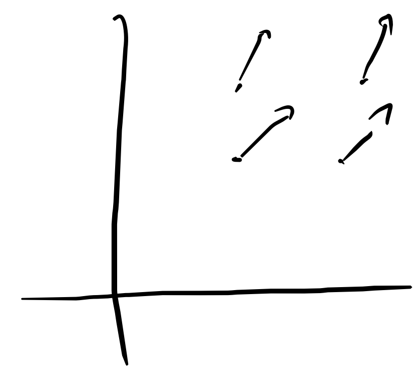
$$\nabla f = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f) = \operatorname{grad} f$$

Für $f: \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}$ Skalarfeld, dann ist $\operatorname{grad} f: G \to \mathbb{R}^n$. Vektorfeld.

Def 4.10a) Ist $g : \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}^n$ partiell diffbar, dann

heißt $\operatorname{div} g := \nabla \cdot g := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_j}$

die Divergenz von g.



b) Ist $g = \operatorname{grad} f$, so schreibt man

$$\Delta f := \operatorname{div} g = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

Δ = Laplace-Operator.

__Bsp 4.7__ $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ rotations-symm.

d.h. $f(\underline{x}) = h(\|\underline{x}\|)$, $\quad h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

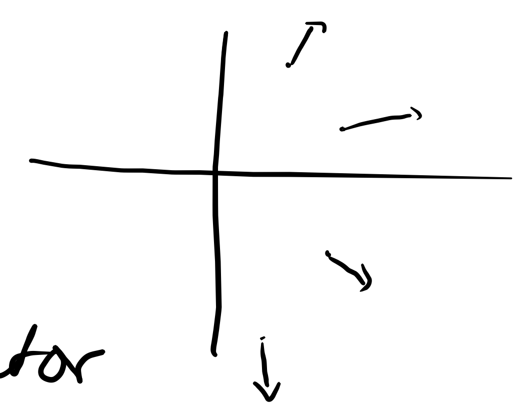
Mit $r(\underline{x}) := \|\underline{x}\|$, $\quad f = h \circ r$

$$\partial_j f = \partial_j (h \circ r) = h'(\|\underline{x}\|)\, \partial_j r$$

$$\partial_j r = \partial_j \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{-1/2} 2 x_j$$

$$= \frac{x_j}{\|\underline{x}\|}, \qquad \nabla r = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} = \underline{e}_r$$

radialer Einheitsvektor



Also $\nabla f = h'(\|\underline{x}\|)\, \underline{e}_r$.

Bsp 4.11 a) $\underline{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \underline{f}(\underline{x}) = \underline{x}$

$$\nabla \cdot \underline{f} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_j}}_{1} = n$$

b) $\underline{f}(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} = \underline{e}_r, \quad \underline{f}: \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}^n$

partiell diffbares Vektorfeld

$$\nabla \cdot \underline{f} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_j}{\|\underline{x}\|}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\|\underline{x}\|} + x_j\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{-3/2} 2x_j\right)$$

$$= \frac{n}{\|\underline{x}\|} - \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{3/2}} = \frac{n}{\|\underline{x}\|} - \frac{\|\underline{x}\|^2}{\|\underline{x}\|^3} = \frac{n-1}{\|\underline{x}\|}.$$

Def 4.12 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, W norm. R.

$C^m(G,W)$ sei der $\overset{\mathbb{K}}{\cancel{\mathbb{R}}}$-Vektorraum der m-mal stetig partiell diffbaren Fktnen $f: G \to W$, d.h.

- f ist st.
- f ist partiell diffb.
- Jedes $\partial_j f$ ist st. und partiell diffb.
- Jedes $\partial_{j_1}\partial_{j_2} f$ ist st. und partiell diffbar

$\vdots$

- $\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_m} f$ ist st.

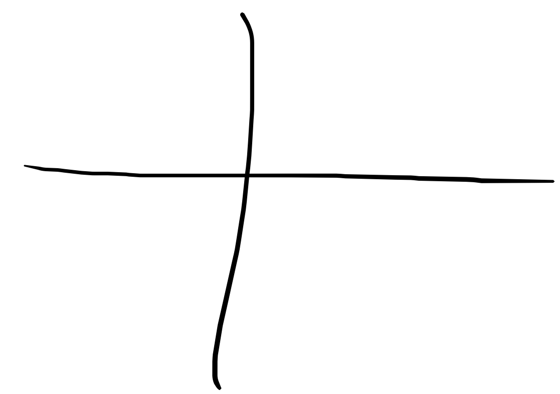
$$C^0(G,W) := C(G,W) := \{ f : G \to W \mid f \text{ st.} \}$$

$$C^m(G) := C^m(G,\mathbb{K}).$$

Bem 4.5 partiell diffbar $\not\Rightarrow$ st.

Bsp $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 1 & y = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



ist in $(0,0)$ partiell diffbar aber nicht st.

4.15 Satz von Schwarz Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, W ~~norm.~~ $\mathbb{K}$-Vektorraum R., $\dim W < \infty$, $f \in C^2(G, W)$. Dann

$$\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x) \qquad \forall x \in G \quad \forall i,j \in \{1 \ldots n\}.$$

Nikolaus Bernoulli (1687 – 1759) 1721
Alexis-Claude Clairaut (1713–1765) 1740
Herrmann Amandus Schwarz (1843–1921) 1873

Def 4.16 $f \in C^2(G)$, $x \in G$

$$\operatorname{Hess} f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x) & \partial_1 \partial_2 f(x) & \cdots & \partial_1 \partial_n f(x) \\ \vdots & & & \\ \partial_n \partial_1 f(x) & \partial_n \partial_2 f(x) & \cdots & \partial_n \partial_n f(x) \end{pmatrix}$$

heißt Hesse-Matrix von f in x (engl. Hessian matrix)

Sie ist symm., $\operatorname{Hess}^T f(x) = \operatorname{Hess} f(x)$.

Bsp 4.17 $\Delta f(x) = \operatorname{Spur} \operatorname{Hess} f(x)$

Bsp Differenzenoperatoren kommutieren

Wähle festes $h > 0$, $f : \mathbb{R}^n \to W$

$$D_i f(\underline{x}) = \frac{f(\underline{x} + h_i \underline{e}_i) - f(\underline{x})}{h_i}$$

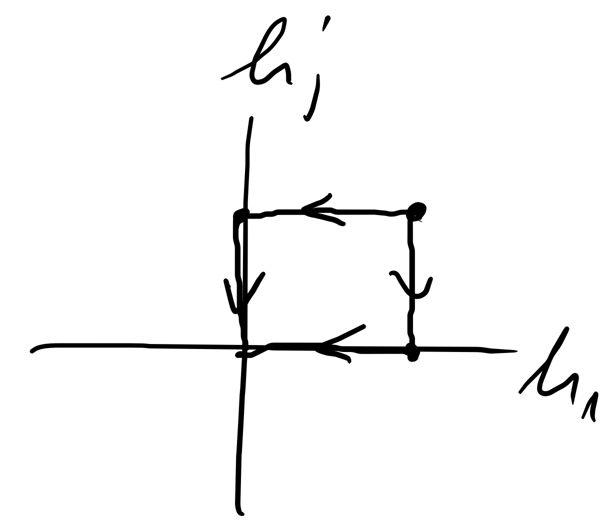
Dann $D_i D_j f = D_j D_i f$

Denn

$$D_i D_j f = \frac{1}{h_i}\left(\frac{f(\underline{x}+h_i\underline{e}_i+h_j\underline{e}_j)-f(\underline{x}+h_i\underline{e}_i)}{h_j} - \frac{f(\underline{x}+h_j\underline{e}_j)-f(\underline{x})}{h_j}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{h^2}\; h_i h_j}\Big(f(\underline{x}+h_i\underline{e}_i+h_j\underline{e}_j) - f(\underline{x}+h_i\underline{e}_i) - f(\underline{x}+h_j\underline{e}_j) + f(\underline{x}) \Big) = D_j D_i f$$

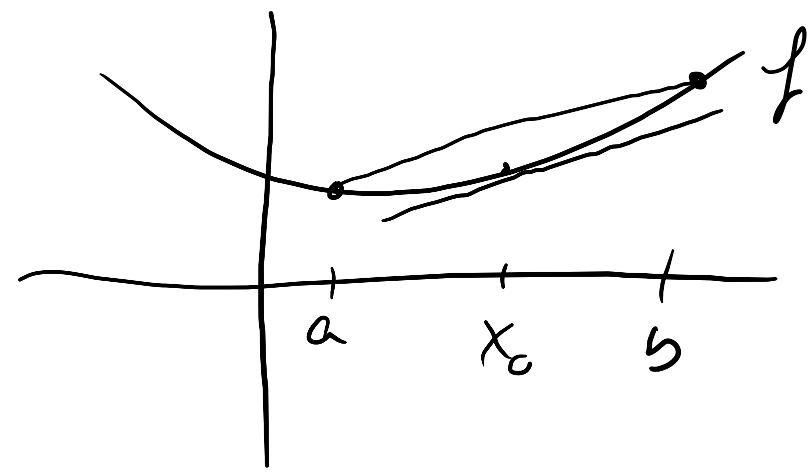
$$\partial_i \partial_j f = \lim_{h_i\to 0} D_i \lim_{h_j \to 0} D_j f$$



<u>Wdh</u> Mittelwertsatz aus Ana 1

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ st, diffbar (a, b)

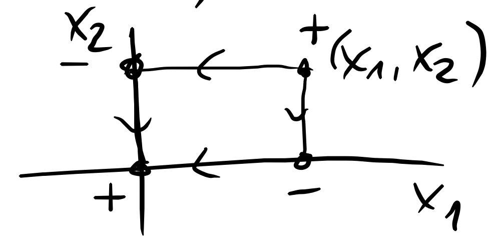
$\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) : \quad f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$



Bew des Satzes von Schwarz

OBdA $W=\mathbb{R}$, $\quad \mathrm{Satz}(W) \Leftarrow \mathrm{Satz}(\mathbb{R}^m) \Leftarrow \mathrm{Satz}(\mathbb{R})$

$n=2,\ i=1,\ j=2,\ \underline{x}=0$



$$y := \underbrace{f(x_1,x_2)-f(x_1,0)}_{=:F(x_1)} - f(0,x_2) + f(0,0) = F(x_1)-F(0)$$

$$\overset{MWS}{=} F'(\alpha)\, x_1 \qquad \Big[\, |\alpha| \le |x_1|,\ \alpha = \alpha(x_1,x_2) \,\Big]$$

$$= \big(\partial_1 f(\alpha,x_2) - \partial_1 f(\alpha,0)\big)\, x_1$$

$$\overset{MWS}{=} \partial_2 \partial_1 f(\alpha,\beta)\, x_1 x_2 \qquad \Big[\, |\beta| \le |x_2|,\ \beta = \beta(x_1,x_2) \,\Big]$$

Andererseits

$$y = \underbrace{f(x_1,x_2) - f(0,x_2)}_{=:\, G(x_2)} - f(x_1,0) + f(0,0)$$

$$= G(x_2) - G(0)$$

$$\overset{\text{MWS}}{=} G'(\gamma)\, x_2 \qquad \left[\, |\gamma| \le |x_{\cancel{1}\,2}|,\ \gamma = \gamma(x_1,x_2) \right]$$

$$= \Big(\partial_2 f(x_1,\gamma) - \partial_2 f(0,\gamma) \Big)\, x_2$$

$$\overset{\text{MWS}}{=} \partial_1 \partial_2 f(\delta,\gamma)\, x_1 x_2 \qquad \left[\, |\delta| \le |x_1|,\ \delta = \delta(x_1,x_2) \right]$$

$\Longrightarrow$ für $x_1 x_2 \neq 0$:

$$\partial_2 \partial_1 f(\alpha,\beta) = \partial_1 \partial_2 f(\delta,\gamma)$$

Vor: $\partial_1\partial_2 f,\ \partial_2\partial_1 f$ st.

$$\downarrow \quad x_1, x_2 \to 0 \quad \downarrow$$

$$\partial_2 \partial_1 f(0,0) = \partial_1 \partial_2 f(0,0) \qquad \square$$