Homöomorphismen

Isomorphismen: Vektorräume $\phi: W \to V$
linear, bij.
(automatisch ϕ^{-1} linear.)

Isometrie: metr. Räume $\phi: (X, d_X) \to (Y, d_Y)$

$$\phi: X \to Y$$

$$d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$$

isometr. & bij $\Rightarrow$ ϕ^{-1} isometrisch.

Homöomorphismus: top. Räume $\phi: X \to Y$
st., bij., ϕ^{-1} st.

Beweis, ~~für~~ dass X, Y homöomorph?

Gib Homöo. ϕ an.

Bew. dass

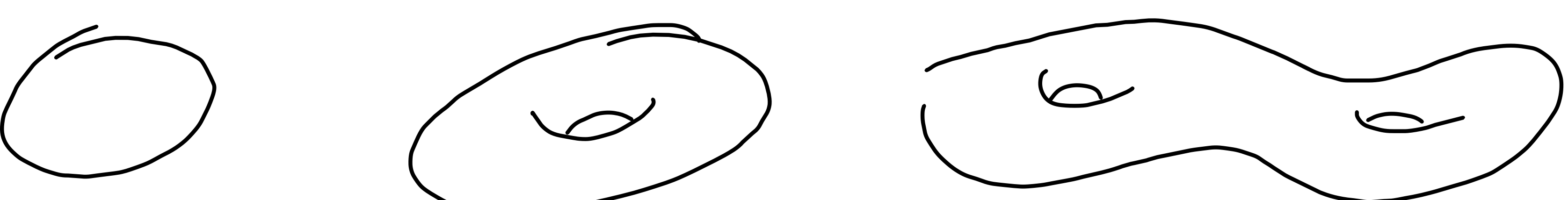
W, V ~~VR~~ VRe nicht isomorph: Invarianten

Bsp: Dimension

~~Bo~~ Invariante für top. R.e: Kompaktheit

$\mathbb{R}^n$ nicht homöo zu $\mathbb{R}^m$ für $n \neq m$.

(Beweis nicht leicht)



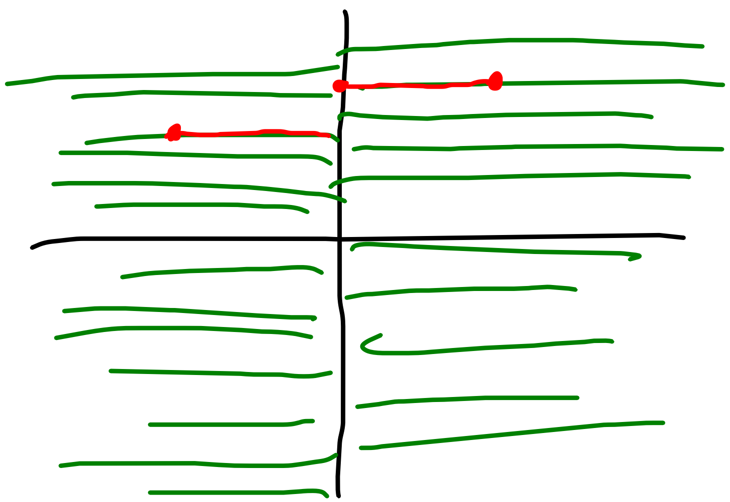
Sphäre Torus

Anz. Löcher: Invariante

Zusammenhang

Bsp Menge $M \subset \mathbb{R}^2$, zush. aber nicht wegzsh.

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x \geq 0 \text{ und } y \in \mathbb{Q} \\ \text{oder } x < 0 \text{ und } y \in \mathbb{Q}^c \end{array} \right\}$$



nicht wegzsh.

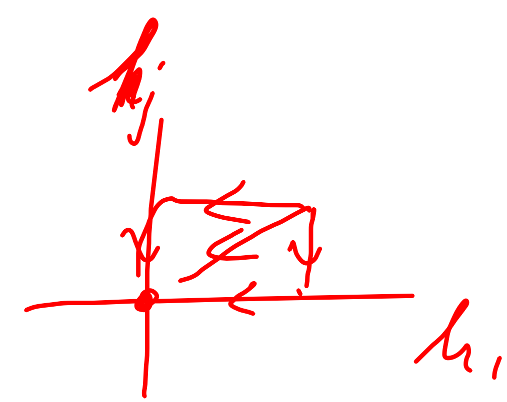
Satz von Schwarz

"$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$"

Satz: Wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existieren in einer Umg. von (x_0, y_0) und in (x_0, y_0) stetig sind, dann sind sie in (x_0, y_0) gleich.

Beweiskonzept: $D_i D_j f = D_j D_i f$

$$\partial_i \partial_j f = \lim_{\underline{h_i \to 0}} D_i \lim_{\underline{h_j \to 0}} D_j f$$



Strategie von Schwarz: zz.

$$D_i f = \partial_i f(\alpha, \beta).$$

<u>Aufgabe:</u> Zeige, dass es keine partiell diffbare Fkt $f(x,y)$ gibt mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2.$$

<u>Lösung:</u>

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = x \quad \neq \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 2x$$

$$\Rightarrow f \in C^2 \xrightarrow{\text{Schw.}} \lightning \qquad \square$$

Gradient

$$f : \mathbb{R}^n \supset G \longrightarrow \mathbb{R}$$

Def: $\operatorname{grad} f = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$

Aufgabe: Finde alle $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} f(\underline{x}) = \underline{x}$.

Lösung: $f(\underline{x}) = \frac{1}{2} r^2 = \frac{1}{2} \|\underline{x}\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} x_j^2$ ist eine solche Fkt.

$f(\underline{x}) = \frac{1}{2} \|\underline{x}\|^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$, ist auch eine Lösung.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = x_j \overset{\text{Ana 1}}{\Longrightarrow} f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} x_j^2 + C(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

Für $n = 2$: $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + C_1(x_2) = \frac{1}{2} x_2^2 + C_2(x_1) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 + C$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} x_1^2 - C_2(x_1) = C = \frac{1}{2} x_2^2 - C_1(x_2)$$

$$\Longrightarrow C_2(x_1) = \frac{1}{2} x_1^2 - C, \quad C_1(x_2) = \frac{1}{2} x_2^2 - C$$

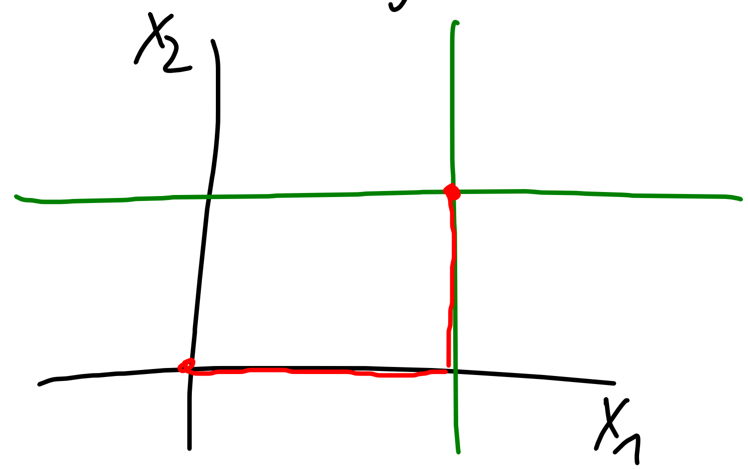
Alternativ-Lösung: $F(\underline{x}) := f(\underline{x}) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} x_j^2$

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} F = 0$

$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \overset{\text{Ana 1}}{\Longrightarrow}$ F hängt nicht von x_j ab.

$\Rightarrow F = \text{const.}$, QED.

$\square$



Punktw. und glm. Konv.

$f_n, f : X \longrightarrow Y$, $\cancel{X}$, Y metr. R. $\cancel{x}$

Def

$f_n \to f$ pktw. $\iff$

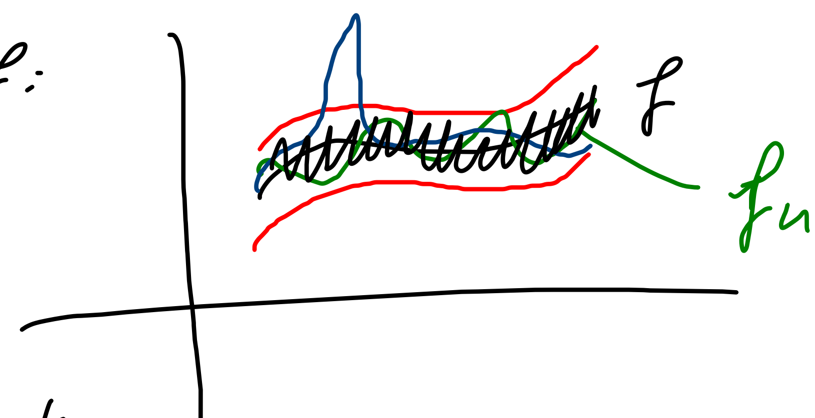
$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in X \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \ d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

$f_n \to f$ glm $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in X : \ d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Satz X, Y metr. R.e, f_n st., $f_n \to f$ glm. $\Rightarrow$ f st.

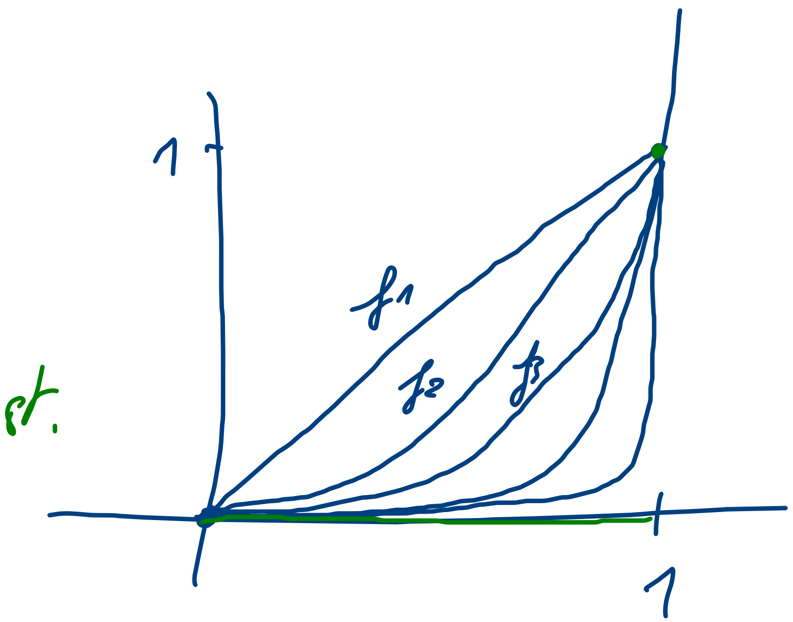
Aufgabe: Geben Sie ein Bsp für f_n, f: $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ an mit



1) jedes f_n st., $f_n \to f$ pktw., f nicht st.
2) jedes f_n st., $f_n \to f$ pktw aber nicht glm, f st.
3) jedes f_n st. diffbar, f st. diffbar, $f_n \to f$ glm., aber nicht $f_n' \to f'$ pktw.
4) jedes f_n st. diffbar. $f_n \to f$ glm., f nicht diffbar

Antwort

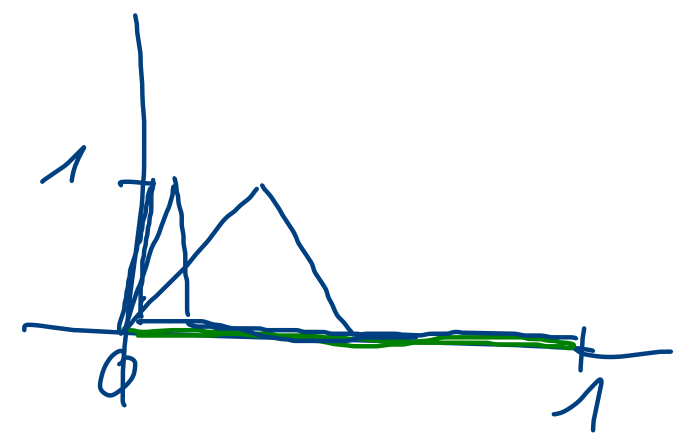
1) $a=0,\ b=1,\ f_n(x) = x^n$



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x<1 \\ 1 & \text{für } x=0 \end{cases}$$ nicht st.

aber $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) \quad \forall x$

2) $a=0,\ b=1,\ f(x)=0$



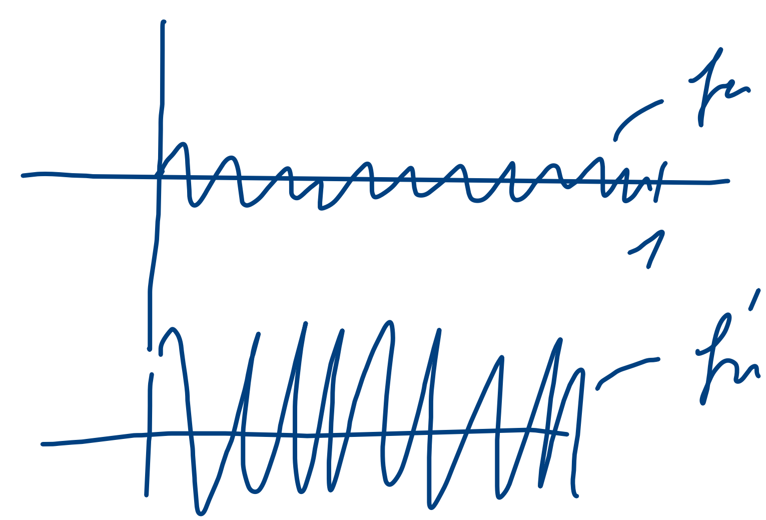
$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{für } 0\leq x\leq \frac{1}{n} \\ 2-nx & \text{für } \frac{1}{n}\leq x\leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{für } x>\frac{2}{n} \end{cases}$$

3) $a=0,\ b=1,\ f(x)=0,$

$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$

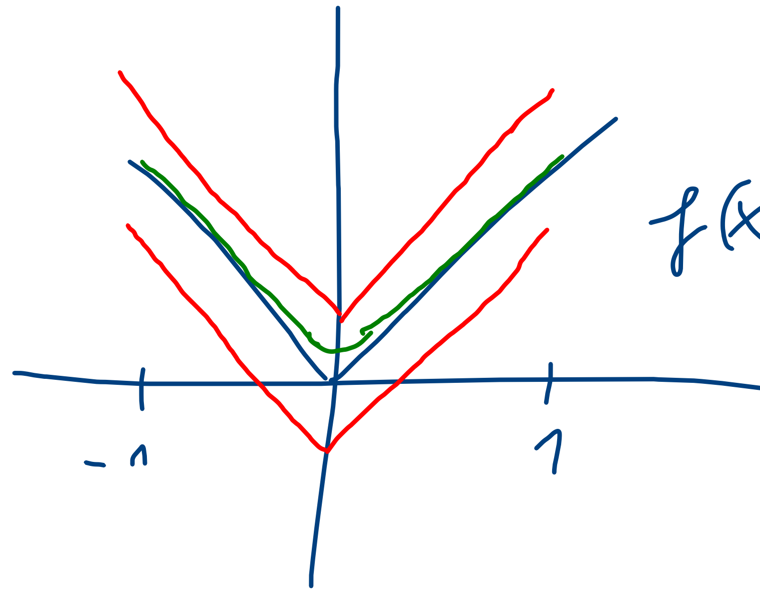
$f_n'(x) = \cos nx$

$f'(x) = 0$



4) $a = -1$, $b = 1$

$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$



$f(x) = |x|$