Def 4.19 Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ~~offen~~, $v: G \to \mathbb{R}^3$ part. diffb. VF,

$$\operatorname{rot} v := \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \nabla \times v$$

heißt **Rotation von v** (englisch curl v)

Korollar 4.20 Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ offen

a) Für $f \in C^2(G)$ gilt $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$

b) Für $v \in C^2(G, \mathbb{R}^3)$ gilt $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0$

Bew z.B. 1. Komp. von a) $(\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f))_1$

$$= \partial_2 (\operatorname{grad} f)_3 - \partial_3 (\operatorname{grad} f)_2 = \partial_2 \partial_3 f - \partial_3 \partial_2 f = 0.$$

$\square$

Bem In $\mathbb{R}^n$, $\quad \partial_i v_j - \partial_j v_i = a_{ij}$

$$A = -A^t \text{ anti-symm.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{n^2-n}{2}$$

Tangentialebene

Bsp $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Tangentialebene an den Graphen von f in $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ ist graph von

$$T = T_{(x_0,y_0)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{affin-linear}$$

Def Sei W ~~$\mathbb{R}$~~ K-VR. $T: \mathbb{R}^n \to W$ heißt affin-linear, wenn $\exists w \in W \; \exists$ lineare $A: \mathbb{R}^n \to W \; \forall x \in \mathbb{R}^n: T(x) = w + Ax.$

Bsp $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$T(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma$$

Tangentialebene $\quad f(x,y) \approx T(x,y)$

für (x,y) nahe bei (x_0, y_0).

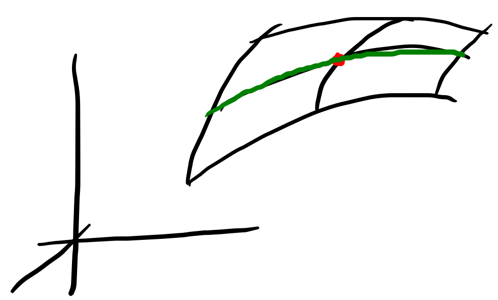
Sicherlich $\quad f(x_0,y_0) = T(x_0,y_0) = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma$

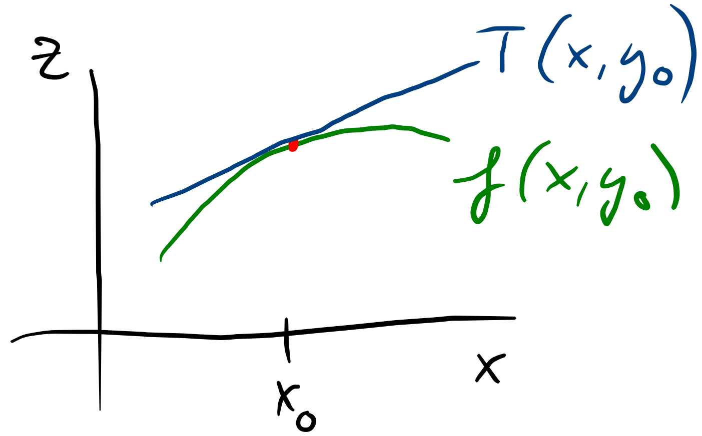
also $\quad T(x,y) = f(x_0,y_0) + \alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0)$

Setze $y = y_0$: $\quad f(x,y_0) \approx T(x,y_0) = f(x_0,y_0) + \alpha(x-x_0)$

(Querschnitt)

$$\alpha = \frac{d}{dx} f(x,y_0)\Big|_{x_0}$$





Tangente

Also $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, ebenso $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$,

also $T(x,y) = f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)\,(x - x_0)$
$\qquad\qquad + \partial_y f(x_0, y_0)\,(y - y_0)$

[$P = (x_0, y_0)$]

$$\stackrel{\downarrow}{=} f(P) + \left\langle \nabla f(P), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - P \right\rangle$$

T = "affin-lineare Approximation an f" in P.

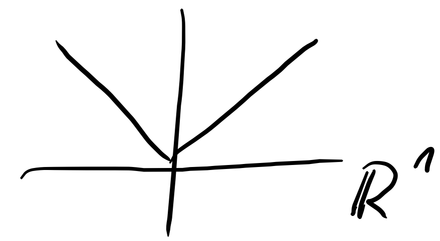
Konseq. für Richtungsabl.

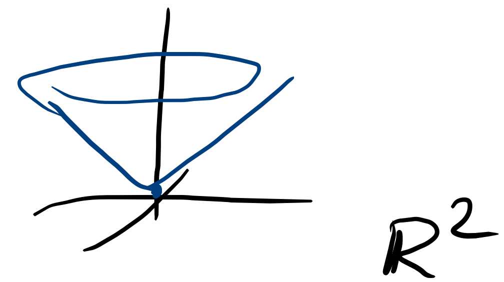
$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{d}{dt} \underbrace{f(P + vt)}_{} \Big|_{t=0} \stackrel{\text{sollte}}{=\!=} \langle \nabla f(P), v \rangle = v_x \partial_x f(P) + v_y \partial_y f(P)$$

$$\approx T(P + vt) = f(P) + \langle \nabla f(P), vt \rangle$$

Bem Nicht jede Funktion besitzt überall eine Tangentialebene.

Bsp $f(\underline{x}) = \|\underline{x}\|$





Def 4.23 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to W$ (norm. R.)

Die $\cancel{\mathbb{R}}$ $\cancel{\mathbb{K}}$ $\mathbb{R}$-affin-lineare Abb $T: \mathbb{R}^n \to W$ heißt die <u>affin-lineare Approximation an f</u> in $x_0 \in G$, wenn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T(x)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

(Hier ist $\|\cdot\|$ bel. Norm auf $\mathbb{R}^n$. Wenn für eine, dann für alle.)

Wenn ~~d~~ ein T existiert und $T(x_0) = f(x_0)$,
so heißt f <u>total differenzierbar</u> in x_0,
und die ~~$\mathbb{K}$~~ $\mathbb{R}$-lineare Abb. $A : \mathbb{R}^n \to W$,

$$A(h) = T(x_0 + h) - f(x_0)$$

heißt das <u>Differenzial</u> oder die <u>(totale) Ableitung</u>
von f in x_0,

$$A = Df\big|_{x_0} = Df(x_0)$$

f heißt <u>total diffbar</u>, wenn $\forall x_0 \in G$ total diffbar ist,
ihre totale Abl. ist $Df : G \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, W)$

$$:= \{\text{lin. Abb. } \mathbb{R}^n \to W\}$$

"VR-Homomorphismen"

<u>Bsp</u> $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$ Dualraum

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad (A_1, \dots, A_n) \in (\mathbb{R}^n)^*,$$

$$Av = (A_1 \cdots A_n)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n A_i v_i$$

$$= \langle \nabla f(p), v \rangle \Rightarrow A = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$$

$\triangle$ Kovektorfeld.

<u>Bem</u> T ist eind.

<u>Bew</u> 1) Vorüberlegung: Jede lin. Abb. $A : \mathbb{R}^n \to W$ ist (stetig weil) Lipschitz-stetig mit $L = \sum_{j=1}^n \|Ae_j\|_W$,

denn $\underline{\|Ax\|_W} = \left\| \sum_{j=1}^n x_j \, A \, e_j \right\|$

$$\leq \sum_{j=1}^n \underbrace{|x_j|}_{\leq \|x\|} \, \|A e_j\|$$

$$\leq \|x\| \sum_{j=1}^n \|Ae_j\| = \underline{L\|x\|}$$

2) Beh: $T_1(x_0) = T_2(x_0)$

Bew: Wenn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{T_1(x) - T_2(x)}{\| x - x_0 \|} = 0$, dann gilt

$$\frac{\| T_1(x_0) + A_1(x - x_0) - T_2(x_0) - A_2(x - x_0) \|}{\| x - x_0 \|}$$

$$\geq \frac{\| T_1(x_0) - T_2(x_0) \|}{\| x - x_0 \|} - \underbrace{\frac{\| \overset{(A_1 - A_2)(x - x_0)}{\cancel{A_1(x - x_0) - A_2(x - x_0)}} \|}{\| x - x_0 \|}}_{\leq L_{A_1 - A_2} \text{ wg } 1)} \xrightarrow{x \to x_0} \infty$$

wäre $T_1(x_0) \neq T_2(x_0)$

Also $T_1(x_0) = T_2(x_0)$.

3) Beh: $A_1 = A_2$.

Wir wissen:

$$\frac{\| (A_1 - A_2)(x - x_0) \|}{\| x - x_0 \|} \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

insbes. für $x = x_0 + \varepsilon e_j$, $\varepsilon > 0$

$$\frac{\cancel{\varepsilon}\, \|(A_1 - A_2)\varepsilon e_j\|}{\cancel{\varepsilon}} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

$\Longrightarrow (A_1 - A_2) e_j = 0 \quad \forall j$

$\Longrightarrow A_1 - A_2 = 0 \qquad \square$

Bem 4.25 $f : \mathbb{R}^n \supset G \longrightarrow W$

f tot. diffbar in x_0 $\Longleftrightarrow$

$\exists$ lin $A : \mathbb{R}^n \to W$: $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \underbrace{o(\|x - x_0\|)}_{\text{irgendein } g(x) \text{ mit } \frac{g(x)}{\|x-x_0\|} \xrightarrow{x \to x_0} 0}$.

Bem f tot. diffb. in x_0 $\Longrightarrow$ f st. in x_0

Bew A Lipschitz $\Rightarrow$ $A(x-x_0) \xrightarrow{x \to x_0} 0$

$$o(\|x-x_0\|) \xrightarrow{x \to x_0} 0. \quad \square$$

Bem f tot. diffbar in x_0 $\Longrightarrow$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = Av.$$

Bew

$$f(x_0+vt) = f(x_0) + Avt + \underbrace{o(\underbrace{\|vt\|}_{\|v\|\,|t|})}_{\overset{v \text{ fest}}{=} o(|t|)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} f(x_0+vt)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+vt) - f(x_0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0}\left(Av + \frac{o(|t|)}{t}\right) = Av. \quad \square$$

Bsp $f: M(n,\mathbb{R}) \longrightarrow M(n,\mathbb{R})$

$$f(X) = X^2$$

total diff'bar: $$f(X_0 + \delta X) = \underbrace{X_0^2}_{f(X_0)} + \underbrace{X_0\,\delta X + \delta X\, X_0}_{A_{X_0}\delta X} + \underbrace{\delta X^2}_{o(\|\delta X\|)}$$

$$\Leftarrow \|\delta X^2\| \leq \|\delta X\|^2$$

für $\|\cdot\| =$ "Operatornorm"

$=$ kleinste Lipschitz-Konstante.

Def 4.31 Wenn $f: \mathbb{R}^n \supset G \to W$, $W = \mathbb{R}^m$, so ist

$A = Df(x_0)$ eine $m \times n$ - Matrix

$$J(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{ij}$$, genannt Jacobi-Matrix

oder Funktionalmatrix von f in x_0.

Satz 4.32 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \to \mathbb{R}$ part. diffb.

Wenn $\partial_i f$ st. in $x_0 \in G$ $\forall i$, dann ist f tot. diffb.

in x_0.

Bew s. Skript.

Korollar 4.33 $\partial_i f$ st in G $\forall i$ $\Rightarrow$

f tot. diffb. in G und st in G.

Bew s. Skript.

Also

st. part. diffb. $\Rightarrow$ total diffb. $\Rightarrow$ part. diffb.

$\Downarrow$

st.