Totale Ableitung

Def $f : \mathbb{R}^n \supset \underset{\text{offen}}{G} \longrightarrow W$ norm. R., $x_0 \in G$

f heißt <u>total ~~differ~~ differ. in x_0</u> $\Longleftrightarrow$

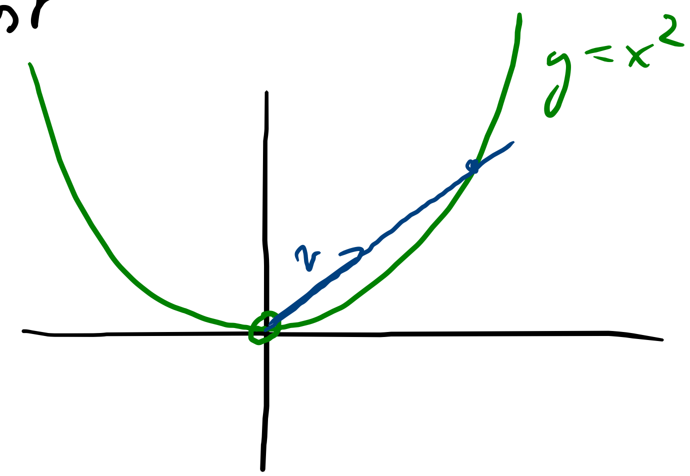
$\exists$ lin $A : \mathbb{R}^n \to W$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

$$\Longleftrightarrow \quad f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

Bsp $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } y = x^2 \text{ und } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



$\exists \ \frac{\partial f}{\partial v}(\underline{0}) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$

aber $\nexists \, Df(\underline{0})$ weil f nicht st. in $\underline{0}$.

$$\left(f\left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n^2}\right) \to 1 \neq f(0,0) = 0 \right)$$

Bem st. part. diffb. $\Longleftrightarrow$ st. total diffbar
("st. diffbar")

Kettenregel

1. Fassung Sei $x:(a,b) \to \mathbb{R}^n$ in $t_0 \in (a,b)$ diffbar, $f: G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x(a,b) \subset G$, f tot. diffbar in $x(t_0)$. Dann ist $t \mapsto f(x(t))$ diffbar in t_0 und

$$\frac{d}{dt} f(x(t))\Big|_{t_0} = \left\langle \nabla f(x(t_0)), \frac{dx}{dt}(t_0) \right\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \nabla f \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= \text{Ri-Abl. } \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{dx}{dt}(t_0)\right)}$$

2. Fassung Sei $x: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ in $s_0 \in \mathbb{R}^m$ tot. diffbar, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ in $x(s_0)$ total diffbar. Dann ist $f \circ x$ in s_0 total diffbar und

$$\frac{\partial}{\partial s_k} f(x(s))\Big|_{s_0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x(s_0)) \, \frac{\partial x_j}{\partial s_k}(s_0)$$

3. Fassung

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{g} & H & \xrightarrow{f} & W \ (\text{norm. R.}) \\ \cap & & \cap & & \\ U & & V & & \mathbb{R}\text{-VRe}, \dim U < \infty \\ & & & & \dim V < \infty \end{array}$$

G, H offen, g in $x \in G$ tot. diffbar

f in $g(x) \in H$ tot. diffbar. Dann ist $f \circ g : G \to W$ in x diffbar und

$$D(f \circ g)\big|_x = \underbrace{Df\big|_{g(x)}}_{W \leftarrow V} \circ \underbrace{Dg\big|_x}_{V \leftarrow U} : U \to W \text{ lin.}$$

Bew Sei $A := Dg|_x$, $B := Df|_{g(x)}$

Zu zeigen: $D(f\circ g)|_x = BA$

$g(x+h) = g(x) + Ah + \varphi(h)$, $\quad \varphi(h) = o(\|h\|)$

$f(g(x)+\eta) = f(g(x)) + B\eta + \psi(\eta)$, $\quad \psi(\eta) = o(\|\eta\|)$

$$\Longrightarrow (f\circ g)(x+h) = f\big(g(x) + \underbrace{Ah + \varphi(h)}_{\eta}\big)$$

$$= f(g(x)) + BAh + \underbrace{B\varphi(h) + \psi(Ah + \varphi(h))}_{=:\chi(h)}$$

Zu zeigen: $\chi(h) = o(\|h\|)$

Also: 1) B Lipschitz $\Longrightarrow$ $\dfrac{\|B\varphi(h)\|}{\|h\|} \le \underbrace{L_B}_{\text{const.}} \underbrace{\dfrac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|}}_{\to 0} \longrightarrow 0.$

Also $B\varphi(h) = o(\|h\|)$.

2) $\psi_1(\eta) := \dfrac{\varphi(\eta)}{\|\eta\|} \xrightarrow{\eta \to 0} 0$

A Lipschitz $\Rightarrow \|Ah\| \le L_A \|h\|$

$\dfrac{\varphi(h)}{\|h\|} \to 0 \Rightarrow \|\varphi(h)\| \le \|h\|$ für h klein genug

Daher $\dfrac{\|\psi(Ah+\varphi(h))\|}{\|h\|} = \dfrac{\overbrace{\|Ah+\varphi(h)\|}^{\|Ah\| + \|\varphi(h)\|}\,\|\psi_1(Ah+\varphi(h))\|}{\|h\|}$

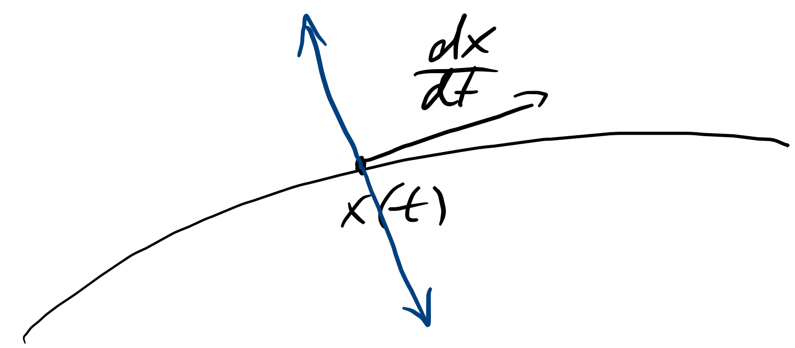
$$\le \frac{\underbrace{(L_A \cancel{\|h\|} + \cancel{\|h\|}^{1})}_{L_A + 1 = \text{const.}}\cancel{\|h\|}\,\|\psi_1(Ah+\varphi(h))\|}{\cancel{\|h\|}} \xrightarrow{h \to 0} 0$$

$\square$

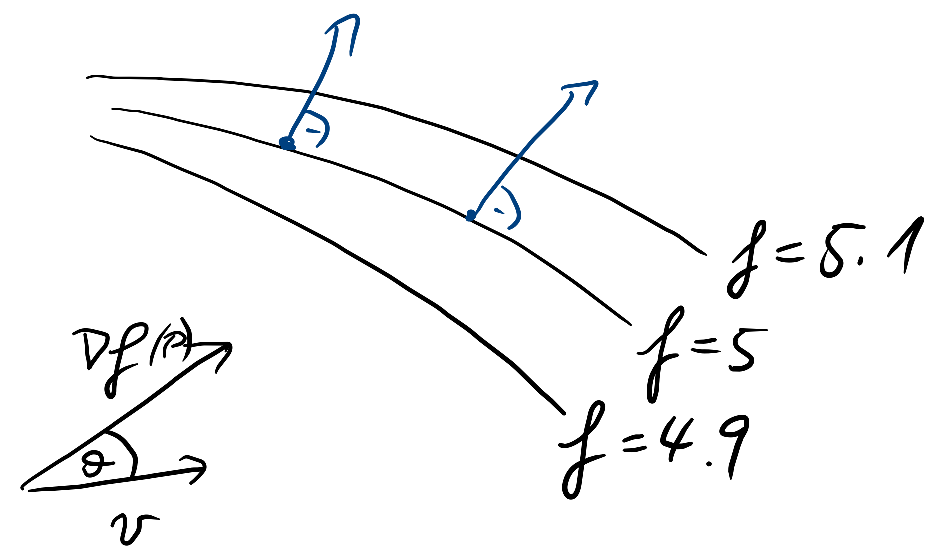
Bsp $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffb., $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ diffbar, verlaufe auf einer Niveaufläche von f, d.h. $f(x(t)) = \text{const.}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{dt} f(x(t)) = \nabla f \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} \perp \nabla f$$



$\nabla f \perp$ auf der Niveaufl.



$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \langle \nabla f(p), v \rangle$$

$$= \|\nabla f(p)\| \, \|v\| \cos\theta$$

Wähle $\|v\|=1$, variiere v

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}$ ist
max. bei $\theta = 0$
min. bei $\theta = \pi$
0 bei $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ Der Gradient zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs von f, und sein Betrag ist der Anstieg in dieser Richtung.

Produktregel

1. Fassung Wenn $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffbar in $x \in \mathbb{R}^n$

dann ist auch fg diffbar in x und

$$\nabla(fg) = (\nabla f) g + f \nabla g .$$

Variante $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\underline{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, dann

$$\frac{d}{dt}(f \underline{g}) = \frac{df}{dt} \underline{g} + f \frac{d\underline{g}}{dt} .$$

Variante $\underline{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\underline{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{f}(t) \cdot \underline{g}(t)\right) = \frac{d\underline{f}}{dt} \cdot \underline{g} + \underline{f} \cdot \frac{d\underline{g}}{dt} .$$

und für $n=3$: $\frac{d}{dt}\left(\underline{f}(t) \times \underline{g}(t)\right) = \frac{d\underline{f}}{dt} \times \underline{g}(t) + \underline{f}(t) \times \frac{d\underline{g}(t)}{dt}$.

Variante $A, B : \mathbb{R} \to M(n, \mathbb{R})$ $n \times n$ - Matrizen

$$\frac{d}{dt}\left(A(t)\,B(t)\right) = \frac{dA}{dt} B + A \frac{dB}{dt}$$

Variante $A, B : \mathbb{R}^m \to M(n, \mathbb{R})$, dann

$$\nabla\left(A(x)B(x)\right) = \left(\nabla A(x)\right) B(x) + A(x)\, \nabla B(x).$$

allg. Fassung 4.39

Sei B (das "Produkt") eine bilineare Abb.

$B : V_1 \times V_2 \to W$, $f_j : G \to V_j$ $(j = 1, 2)$

V_1, V_2 endl.-dim. VRe, W norm. R.

$G \subset U$ offen, U endl.-dim $\mathbb{R}$-VR.

Wenn f_j diffbar, dann ist

$$u \longmapsto \underbrace{B(f_1(u), f_2(u))}_{=: F(u)} \text{ diffbar und}$$

$$DF|_u v = B(Df_1|_u v, f_2(u)) + B(f_1(u), Df_2|_u v) \quad \forall v \in U$$

Ebenso für multilineare $B : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \longrightarrow W$,

diffb. $f_j : G \to V_j$, $F(u) = B(f_1(u), \dots, f_r(u))$:

$$DF|_u v = \sum_{j=1}^{r} B(f_1(u), \dots, Df_j|_u v, \dots, f_r(u))$$

<u>Bew</u> Schritt 1) B ist "doppelt Lipschitz", d.h.

$$\|B(x,y)\| \leq L_B \|x\| \, \|y\| \quad \text{mit } L_B = \sum_{ij} \|B(e_i, e_j)\|$$

denn $\|B(x,y)\| = \|B(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j)\| = \|\sum_{ij} x_i y_j B(e_i, e_j)\|$

$$\leq \sum_{ij} \underbrace{|x_i|}_{\leq \|x\|} \underbrace{|y_j|}_{\leq \|y\|} \|B(e_i, e_j)\|$$

$$\leq \|x\| \|y\| L_B .$$

Schritt 2) $B\big(f_1(u+v), f_2(u+v)\big)$

$$= B\Big(f_1(u) + Df_1|_u v + o(\|v\|), f_2(u) + Df_2|_u v + o(\|v\|)\Big)$$

const $\longrightarrow$ $= B\big(f_1(u), f_2(u)\big)$

lin. $\longrightarrow$ $+ B\big(Df_1|_u v, f_2(u)\big) + B\big(f_1(u), Df_2|_u v\big)$

$o(\|v\|)$ $\Big\{$

$$+ \underbrace{B\big(Df_1|_u v, Df_2|_u v\big)}_{\|\cdot\| \leq L_B L_{Df_1|_u} \|v\| L_{Df_2|_u} \|v\|} + \underbrace{B\big(o(\|v\|), f_2(u) + Df_2|_u v\big)}_{\|\cdot\| \leq L_B\, o(\|v\|) \left(\|f_2(u)\| + L_{Df_2|_u} \|v\|\right) = o(\|v\|)}$$

$$+ \underbrace{B\big(f_1(u) + Df_1|_u v, o(\|v\|)\big)}_{\text{etc.}} + \underbrace{B\big(o(\|v\|), o(\|v\|)\big)}_{\text{etc.}}$$

multilinear analog. $\square$

Bsp 4.40c) $\quad \det : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_{m \text{ Faktoren}} \to \mathbb{R}$ multilinear

Sei $f_1 \dots f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diffbar, dann

$$D \det\left(f_1(\cdot), \dots, f_m(\cdot)\right)\Big|_x v =$$

$$\sum_{j=1}^{m} \det\left(f_1(x), \dots, D f_j|_x v, \dots, f_m(x)\right).$$