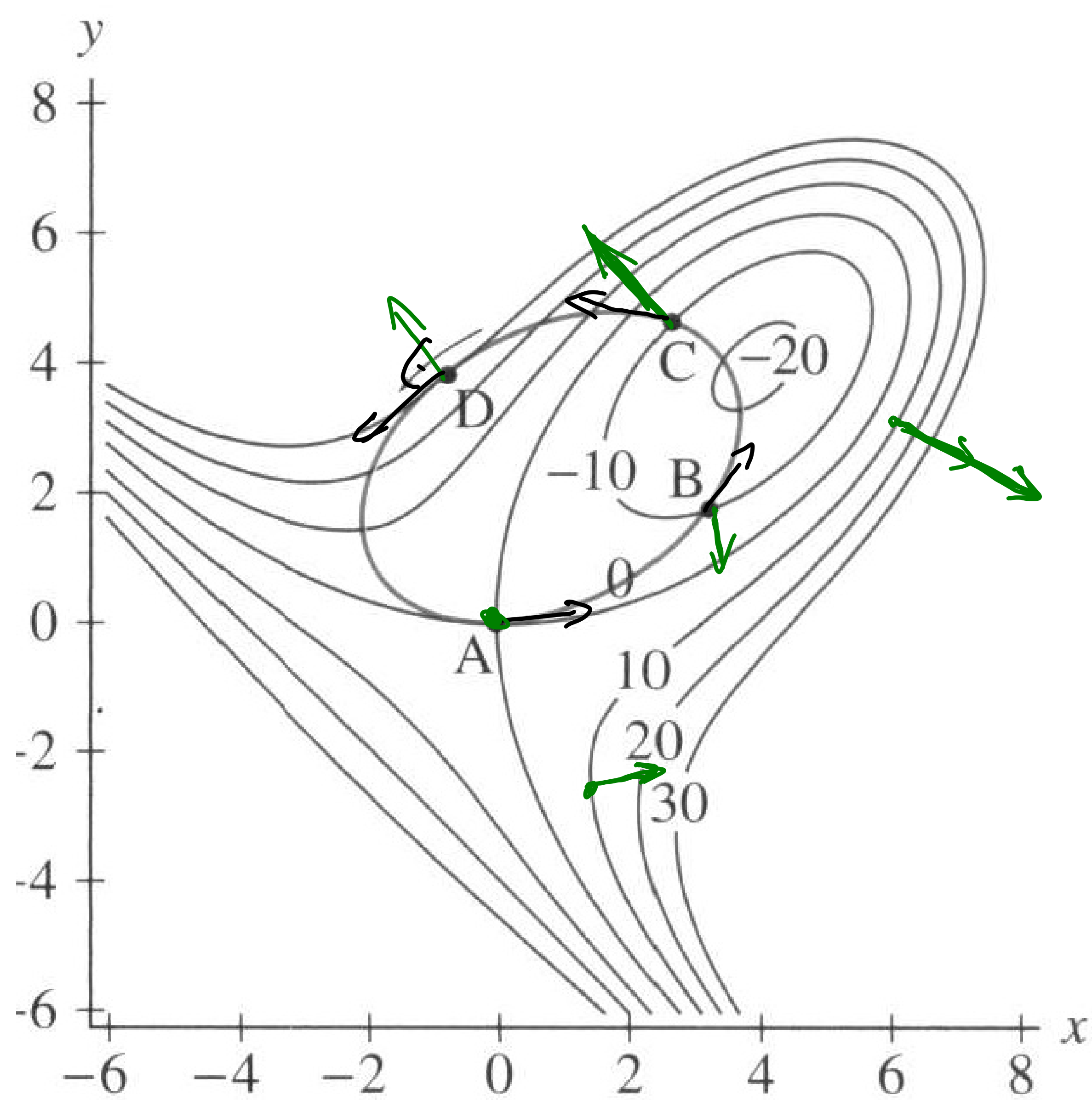
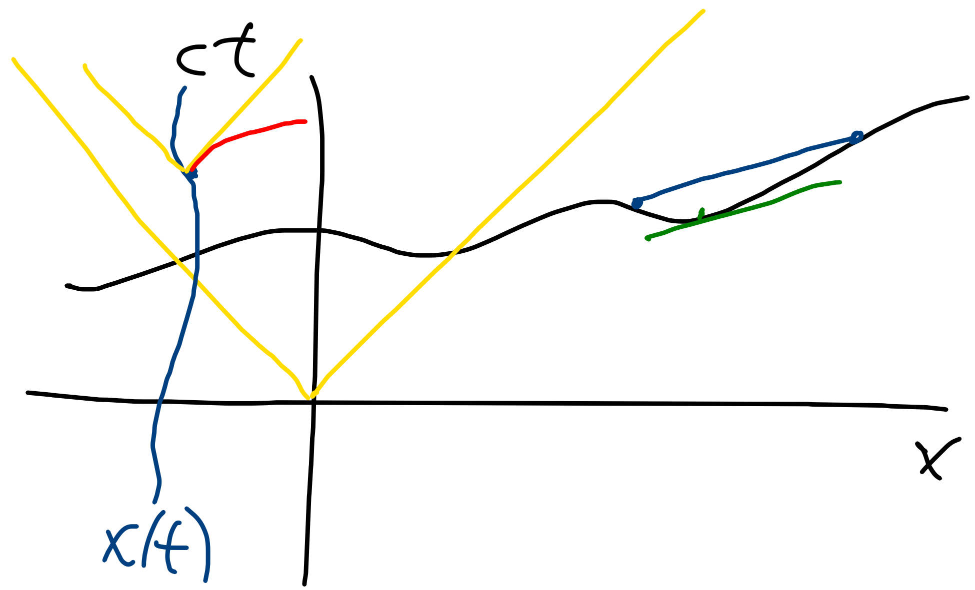

y
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
x
A
B
C
D
−20
−10
0
10
20
30

Kontraktionen

$$\phi : X \to Y, \quad d\big(\phi(x_1), \phi(x_2)\big) \le L\, d(x_1, x_2) \quad (*)$$

$$0 < L < 1$$

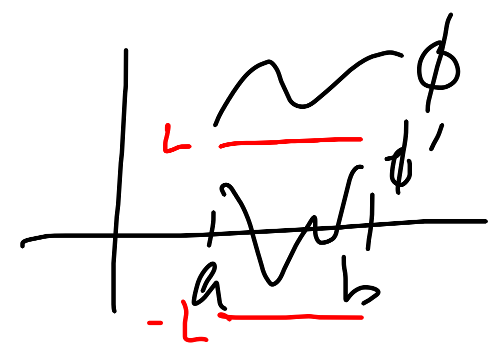


$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Um $(*)$ zu beweisen,

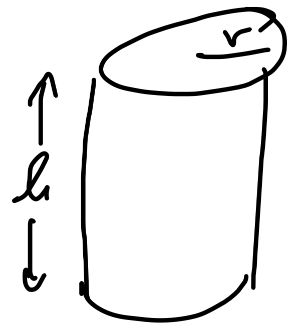
$$\frac{|\phi(x_1) - \phi(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \overset{\text{MWS}}{=} |\phi'(\xi)| \le L \quad \Leftarrow \quad |\phi'| \le L \text{ überall}$$

$$x_1 < \xi < x_2$$



Affin-lineare Approximation

Aufgabe: Zylinder



Oberfläche

$$F(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Berechne approximativ: $F(2{,}02\,;\,3{,}99)$.

$$F(2,4) = 24\pi.$$

Lösung: $F(2.02\,;\,3{,}99) = F(2+0{,}02\,;\,4-0{,}01)$

$$\approx F(2;4) + 0{,}02 \cdot \frac{\partial F}{\partial r}(2;4) - 0{,}01 \cdot \frac{\partial F}{\partial h}(2;4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 4\pi r + 2\pi h. \qquad \frac{\partial F}{\partial h} = 2\pi r. \qquad \frac{\partial F}{\partial r}(2;4) = 8\pi + 8\pi = 16\pi$$

$$\frac{\partial F}{\partial h}(2;4) = 4\pi.$$

$F(2{,}02\,;\,3{,}99) \approx 24\pi + 0{,}32\pi - 0{,}04\pi = 24{,}28\pi.$

Frage: Gl. der Tangentialebene an $F(r,h)$ in $(2,4)$?

Antwort: " Graph der Fkt $T(r,h)$

$$T(r,h) = F(2,4) + (r-2)\frac{\partial F}{\partial r}(2,4) + (h-4)\frac{\partial F}{\partial h}(2,4)$$

$$= 24\pi + (r-2)\,16\pi + (h-4)\,4\pi$$

$$= -24\pi + 16\pi r + 4\pi h$$

Kettenregel

Kettenregel für Gradient und Kurve:

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad f(x(t))$

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \operatorname{grad} f(x(t)) \cdot \dot{x}(t)$$
$$= \sum_{j=1}^{3} \partial_j f(x(t)) \, \dot{x}_j(t)$$

Bsp Ein Satz von Euler:

Diffb. homogene Fkt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(t\underline{x}) = t^\alpha f(\underline{x})$

Dann $(\operatorname{grad} f(\underline{x})) \cdot \underline{x} = \alpha f(\underline{x})$

Beweis re.S. $\frac{d}{dt}\left(t^\alpha f(\underline{x})\right) = f(\underline{x}) \alpha t^{\alpha-1} \overset{t=1}{=} \alpha f(\underline{x})$

li.S. $\frac{d}{dt} f(t\underline{x}) = \operatorname{grad} f(t\underline{x}) \cdot \underline{x} \overset{t=1}{=} \operatorname{grad} f(\underline{x}) \cdot \underline{x}. \quad \square$

<u>Aufgabe:</u> $T(x,t)$ Temp. $= \frac{x^2}{t^2}$

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$x(t) = 2\sqrt{t}$

gefühlte Temp. $g(t) = T(x(t), t)$

Bestimme $g'(2)$ auf 2 Weisen:

a) Berechne $g(t)$, $g'(t)$, $g'(2)$.

b) Kettenregel: drücke $g'(t)$ durch grad T, $\dot{x}$ aus.

<u>Lösung:</u> a) $g(t) = \frac{(2\sqrt{t})^2}{t^2} = \frac{4t}{t^2} = \frac{4}{t}$

$g'(t) = -\frac{4}{t^2}$, $g'(2) = -1$.

b) $\operatorname{grad} T = \left(\frac{\partial T}{\partial x} , \frac{\partial T}{\partial t} \right)$

$= \left(\frac{2x}{t^2} , - \frac{2x^2}{t^3} \right)$

Kettenr: $g'(t) = \operatorname{grad} T \begin{pmatrix} 2\sqrt{t} \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} 2\sqrt{t} \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \left(\frac{4\sqrt{t}}{t^2} , - \frac{8t}{t^3} \right) \begin{pmatrix} \frac{2}{2} t^{-1/2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4\cancel{\sqrt{t}}}{\cancel{\sqrt{t}}\, t^2} - \frac{8\cancel{t}}{t^{\cancel{3}2}} = -\frac{4}{t^2}$

$\Rightarrow g'(2) = -1.$

Euler-Ableitung $\frac{d}{dt} T(x(t), t) = \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla T \cdot \frac{dx}{dt}$

$\frac{dT}{dt}$ vs. $\frac{\partial T}{\partial t}$

allg. Kettenregel: $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \, J_f(x).$$

<u>Aufgabe</u>: ~~Ku~~ Kugelkoo: $g(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

$$f(x,y,z) = x^2$$

Bestimme $J_{f \circ g}$ auf 2 Weisen: a) direkte Rechnung, b) Kettenregel.

<u>Lösung</u>: a) $f \circ g(\theta, \varphi) = \cos^2\theta \cos^2\varphi$

$$J_{f \circ g}(\theta, \varphi) = \left(-2\cos\theta \sin\theta \cos^2\varphi, \; -\cos^2\theta \, 2\cos\varphi \sin\varphi\right)$$

b) $J_g(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \cos\varphi & -\cos\theta \sin\varphi \\ -\sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$, $J_f(x,y,z) = (2x, 0, 0)$

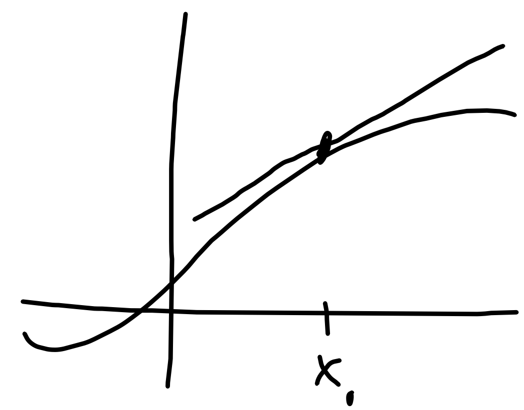
$$J_f(g(\theta, \varphi)) = (2\cos\theta \cos\varphi, 0, 0)$$

$J_f \cdot J_g = \left(-2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi, -2\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\right).$

<u>Aufgabe</u>: Zeigen Sie, dass $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f(\underline{x}) = e^{\|\underline{x}\|}$ in allen $\underline{x} \neq \underline{0}$ total diffbar ist.

<u>Lösung</u>: Kettenregel: Wenn g, h diffbar dann $g \circ h$ diffbar.



exp ist überall diffbar

$\|\cdot\|$ ist für $\underline{x} \neq \underline{0}$ diffbar $\Rightarrow$ Beh. $\square$