Taylor-Entwicklung

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\underline{x}$, $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$,

$$f(\underline{x}+\underline{h}) = \underbrace{\sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!} (\underline{h} \cdot \nabla)^m f(\underline{x})}_{\text{Taylor-Polynom vom Grad } k} + \underbrace{o(\|\underline{h}\|^k)}_{\text{Rest}}$$

$$P^{(k)}_{f,\underline{x}}(\underline{x}+\underline{h})$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!} \sum_{j_1 \dots j_m = 1}^{n} h_{j_1} \cdots h_{j_m} \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_m} f(\underline{x}) + o(\|\underline{h}\|^k)$$

Notation $\alpha_j := \#\{r \in \{1 \ldots m\} \mid j_r = j\}$

$$\underline{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

$$\underline{h}^{\underline{\alpha}} := h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \cdots h_n^{\alpha_n}$$

$$\partial^{\underline{\alpha}} f := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f$$

$$|\underline{\alpha}| := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$$

$$\underline{\alpha}! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

$$\partial^{\underline{\alpha}} f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Multinomialkoeffizient $\binom{k}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} := \frac{k!}{\alpha_1! \, \alpha_2! \cdots \alpha_n!}$ für $|\underline{\alpha}| = k$

Binomial-koeff: $\binom{n}{k} = \binom{n}{k \quad n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$\binom{n}{k}$ = Anz. k-el. Teilmengen einer n-el. Menge.

$\binom{k}{\alpha_1 \;\dots\; \alpha_n}$ = Anz. der nummerierten Partitionen einer k-el. Menge in eine α_1-el., eine α_2-el., …, eine α_n-el.

$\alpha_1 = 4$

$\alpha_2 = 2$

$\alpha_3 = 1$

= Anz. Mögl. k Exemplare eines Artikels an n Kunden so zu verteilen, dass Kunde j α_j viele bekommt.

Bsp.: $\binom{7}{4 \quad 2 \quad 1} = \frac{7!}{4!\,2!\,1!} = \frac{5040}{48}$

Also $\displaystyle\sum_{j_1 \cdots j_m = 1}^{n} h_{j_1} \cdots h_{j_m} \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_m}$

$$= \sum_{|\underline{\alpha}| = m} \binom{\overset{m}{\cancel{k}}}{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \underline{h}^{\underline{\alpha}} \partial^{\underline{\alpha}} .$$

Also $\displaystyle f(\underline{x}+\underline{h}) = \sum_{|\underline{\alpha}| \leq k} \frac{1}{\underline{\alpha}!} \underline{h}^{\underline{\alpha}} \partial^{\underline{\alpha}} f(\underline{x}) + o(\|\underline{h}\|^k)$

Rigoros:

<u>Lemma 5.2</u> $f \in C^k(G, \mathbb{R}) \Rightarrow \dfrac{\partial^k f}{\partial \underline{v}^k} = (\underline{h} \cdot \nabla)^k f$

$$= \sum_{|\underline{\alpha}| = k} \frac{k!}{\underline{\alpha}!} \partial^{\underline{\alpha}} f .$$

5.4 Satz von Taylor Sei $f \in C^{k+1}(G, \mathbb{R})$,

$\underline{x} \in G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$, $\{\underline{x} + t\underline{h} \mid t \in [0,1]\} \subset G$.

Dann $\exists \vartheta \in [0,1]$:

$$f(\underline{x}+\underline{h}) = \sum_{|\underline{\alpha}| \le k} \frac{1}{\underline{\alpha}!} \underline{h}^{\underline{\alpha}} \partial^{\underline{\alpha}} f(\underline{x}) + \underbrace{\sum_{|\underline{\alpha}|=k+1} \frac{1}{\underline{\alpha}!} \underline{h}^{\underline{\alpha}} \partial^{\underline{\alpha}} f(\underline{x} + \vartheta \underline{h})}_{\text{Restterm}}.$$

Bew Setze $\underline{\gamma}(t) = \underline{x} + t\underline{h}$

$\varphi(t) = f(\underline{\gamma}(t))$, $\varphi \in C^{k+1}([0,1], \mathbb{R})$

Satz von Taylor in $\mathbb{R}^1 \Rightarrow \exists \vartheta \in [0,1]$:

$$\varphi(1) = \sum_{m=0}^{k} \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} 1^m + \frac{\varphi^{(k+1)}(\vartheta)}{(k+1)!} \Rightarrow \text{Bel.} \quad \square$$

Korollar 5.6 Sei $f \in C^k(G, \mathbb{R})$, $\underline{x} \in G \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Dann $f(\underline{x} + \underline{h}) = \sum_{|\underline{\alpha}| \le k} \frac{1}{\underline{\alpha}!} \underline{h}^{\underline{\alpha}} \partial^{\underline{\alpha}} f(\underline{x}) + o(\|\underline{h}\|^k)$

Bew G offen $\Rightarrow \exists \delta > 0 : B_\delta(\underline{x}) \subset G$

konvex

Satz von Taylor $\Rightarrow \forall \underline{h} \in B_\delta(\underline{x}) \ \exists \theta(\underline{h}) \in [0, 1]$:

$$f(\underline{x} + \underline{h}) = \sum_{|\underline{\alpha}| \le k-1} \frac{\underline{h}^{\underline{\alpha}}}{\underline{\alpha}!} \partial^{\underline{\alpha}} f(\underline{x}) + \sum_{|\underline{\alpha}| = k} \frac{\underline{h}^{\underline{\alpha}}}{\underline{\alpha}!} \partial^{\underline{\alpha}} f(\underline{x} + \theta(\underline{h}) \underline{h})$$

Schreibe

$$f(\underline{x} + \underline{h}) = \sum_{|\underline{\alpha}| \le k} \frac{\underline{h}^{\underline{\alpha}}}{\underline{\alpha}!} \partial^{\underline{\alpha}} f(\underline{x}) + \varphi(\underline{h})$$ definiert φ

$$\Rightarrow \varphi(\underline{h}) = \sum_{|\underline{\alpha}| = k} \frac{\underline{h}^{\underline{\alpha}}}{\underline{\alpha}!} \left(\partial^{\underline{\alpha}} f(\underline{x} + \theta(\underline{h}) \underline{h}) - \partial^{\underline{\alpha}} f(\underline{x}) \right)$$

Zu zeigen: $\varphi(\underline{h}) = o(\|\underline{h}\|^k)$

$$\iff \frac{\varphi(\underline{h})}{\|\underline{h}\|^k} \xrightarrow{\underline{h}\to 0} 0$$

Tatsächlich

$$\frac{\varphi(\underline{h})}{\|\underline{h}\|^k} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \underbrace{\frac{\underline{h}^{\alpha}}{\|\underline{h}\|^k}} \Big(\underbrace{\partial^{\alpha} f(\underline{x} + \theta(\underline{h})\underline{h}) - \partial^{\alpha} f(\underline{x})}_{\xrightarrow{\underline{h}\to 0}\ 0 \text{ weil } \partial^{\alpha} f \text{ st.}} \Big)$$

$$= \frac{h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \cdots h_n^{\alpha_n}}{\|\underline{h}\|^{\alpha_1} \|\underline{h}\|^{\alpha_2} \cdots \|\underline{h}\|^{\alpha_n}} \in [-1, 1]$$

$|h_1| \leq \|\underline{h}\|$

$$\left(\frac{h_1}{\|\underline{h}\|}\right)^{\alpha_1} \in [-1, 1]$$

$\square$

Bem 5.7 $k=0$: $f(\underline{x}+\underline{h}) = f(\underline{x}) + o(1)$

($\Leftrightarrow$ f st.)

$k=1$: $f(\underline{x}+\underline{h}) = f(\underline{x}) + Df(\underline{x})\,\underline{h} + o(\|\underline{h}\|)$

($\Leftrightarrow$ f diffbar)

$k=2$: $f(\underline{x}+\underline{h}) = f(\underline{x}) + Df(\underline{x})\,\underline{h} + \frac{1}{2}\langle \underline{h}, \operatorname{Hess} f(\underline{x})\,\underline{h}\rangle + o(\|\underline{h}\|^2)$

Anwendung auf lokale Extrema

Extremum = Minimum oder Maximum

Def 5.8 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, $f: M \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \in M$

f hat in $\underline{x}$ ein <u>lokales Maximum</u> $:\Leftrightarrow$

$\exists \delta > 0\ \forall \underline{y} \in B_\delta(\underline{x}) \cap M: \quad f(\underline{y}) \leq f(\underline{x})$.

<u>striktes lokales Max.</u> $:\Longleftrightarrow$

$$\exists \delta>0\ \forall \underline{y} \in \left(B_\delta(\underline{x}) \cap M\right) \setminus \{\underline{x}\}: \ f(\underline{y}) < f(\underline{x})$$

Entspr. Min.

Kap 0: <u>Prop 5.9</u> Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\underline{x} \in G$,

$f: G \to \mathbb{R}$ habe ein lok. Extr. in $\underline{x}$,

f sei partiell diffbar in x. Dann

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}) = 0 \quad \forall i \in \{1 \dots n\}.$$

<u>Bem</u> lok. Extrema können liegen

- wo $\partial_i f = 0 \ \forall i$. — $\underline{x}$ ist „kritischer Punkt" von f
- wo f nicht partiell diffbar
- auf dem Rand

Satz 5.12 ("2te-Ableitung-Test")

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(G, \mathbb{R})$, $\underline{x} \in G$,

$Df(\underline{x}) = 0$.

a) Ist $\operatorname{Hess} f(\underline{x})$ positiv definit, dann hat f in $\underline{x}$ ein striktes lok. Min.

b) Ist $\operatorname{Hess} f(\underline{x})$ negativ definit, dann hat f in $\underline{x}$ ein striktes lok. Max.

c) Ist $\operatorname{Hess} f(\underline{x})$ indefinit, dann hat f in $\underline{x}$ kein lokales Extremum.

Def $A \in M(n, \mathbb{R})$ mit $A = A^T$ heißt

pos. definit $\iff \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}: \langle \underline{x}, A\underline{x} \rangle > 0$

neg. definit $\quad < 0$

pos. semidefinit $\iff \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n: \quad \langle \underline{x}, A\underline{x} \rangle \geq 0$

neg. semidefinit $\quad \leq 0$

<u>indefinit</u> $\Longleftrightarrow$ $\exists\, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$: $\langle \underline{x}, A\underline{x} \rangle > 0$

$\langle \underline{y}, A\underline{y} \rangle < 0$.

<u>Bem</u> Jedes $A = A^T$ ist diagbar durch eine ONB

$$\langle \underline{x}, \underbrace{\mathrm{diag}(\alpha_1 \dots \alpha_n)}_{\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}} \underline{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 .$$

Daher

(neg.) $\alpha_i < 0$

A pos. def. $\Longleftrightarrow$ alle EWe $\alpha_i > 0$

(neg.) $\alpha_i \leq 0$

A pos. semidefinit $\Longleftrightarrow$ alle EWe $\alpha_i \geq 0$

A indefinit $\Longleftrightarrow$ $\exists$ pos. EWe und neg. EWe.

Bew 5.12: nä. Woche.