Ableitung der Norm

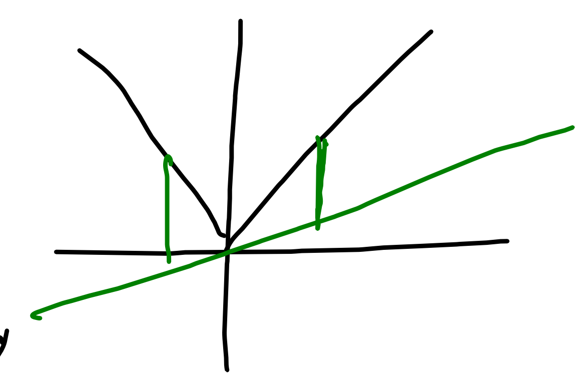
$$f(x_1 \dots x_n) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + \dots + x_n^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2x_i = \frac{x_i}{\|\underline{x}\|}$$

$$\operatorname{grad} f(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \qquad \exists \; \forall\, \underline{x} \neq \underline{0}$$

Satz: Wenn $\exists\, \partial_i f$ st., in $\underline{x}$ dann f total diffbar in $\underline{x}$.

$\Rightarrow f$ diffbar in $\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$.



In $\underline{0}$ nicht diffbar: Beweis: nicht mal partiell diffbar: $x_1 = 0, \dots, x_{n-1} = 0,\ x_n \neq 0$

$\Rightarrow f(0, \dots, 0, x_n) = |x_n|$ nicht diffbar in 0. $\square$

Taylor-Entwicklung

$$f(x,y) = e^{xy}$$

$$\underline{h} = (1,1), \quad \underline{x} = (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{h}} = \frac{d}{dt} f(\underline{x} + t\underline{h})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(t,t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{t^2}\Big|_{t=0}$$

$$= 2t\, e^{t^2}\Big|_{t=0} = 0.$$

$$\underline{h} \cdot \nabla f = \underline{h} \cdot \left(y e^{xy}, x e^{xy}\right)\Big|_{(0,0)} = \underline{h} \cdot (0,0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \underline{h}^2} = \frac{d^2}{dt^2} f(\underline{x} + t\underline{h})\Big|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2} f(t,t)\Big|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2} e^{t^2}\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(2t\, e^{t^2}\right)\Big|_{t=0} = 2e^{t^2} + 4t^2 e^{t^2}\Big|_{t=0} = 2$$

$$(\underline{h}\cdot\nabla)^2 f = (\partial_x+\partial_y)^2 f = (\partial_x+\partial_y)\Big((y+x)e^{xy}\Big)$$

$$=\Big(1e^{xy} + (y+x)ye^{xy} + 1e^{xy} + (y+x)xe^{xy}\Big)$$

$$=\left(2+y^2+2xy+x^2\right)e^{xy}$$

$$(\underline{h}\cdot\nabla)^2 f(0,0) = 2$$

$$T^{(2)}_{f,0}(\underline{x}+\underline{h}) = \underbrace{f(\underline{x})}_{e^0=1} + \underline{h}\cdot\underbrace{\nabla f(\underline{x})}_{(ye^{xy},\,xe^{xy})\big|_{(0,0)}=(0,0)} + \frac{1}{2}\left\langle \underline{h}, \mathrm{Hess}\, f(\underline{x})\,\underline{h}\right\rangle$$

$$\mathrm{Hess}\, f = \begin{pmatrix} \partial_x^2 f & \partial_x\partial_y f \\ \partial_y\partial_x f & \partial_y^2 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2e^{xy} & e^{xy}+xye^{xy} \\ e^{xy}+xye^{xy} & x^2e^{xy} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\langle \underline{h}, \operatorname{Hess} f(0,0)\,\underline{h}\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_2 \\ h_1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2}(h_1 h_2 + h_2 h_1) = h_1 h_2$$

$$\Rightarrow P_f^{(2)}(\underline{x}+\underline{h}) = 1 + h_1 h_2 .$$

$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1$

$\underline{\alpha} = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ Multi-Index, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$

$|\underline{\alpha}| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2$

z.B. $\underline{x} = (1,1)$

$\left[P(\underline{y}) = y_1 y_2,\ P(\underline{h}) = h_1 h_2,\ P(\underline{x}+\underline{h}) = (x_1+h_1)(x_2+h_2) \right.$

$\left. = (1+h_1)(1+h_2) = 1 + h_1 + h_2 + h_1 h_2 \right]$

2te Abl.: $\quad Df(\underline{x})$ linear : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$Df : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}_{\mathbb{R}^{2n}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\underline{x}, \underline{v}) \longmapsto Df(\underline{x})\,\underline{v}$$

$$D^2 f : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

n davon überfl.

$$D^2 f(\underline{x}) : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

bilinear

$\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n \qquad (\underline{v}, \underline{w}) \longmapsto \langle \underline{v}, A\underline{w} \rangle, \qquad A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear

$A = \mathrm{Hess}\, f(\underline{x})$.

Notwendige Bed. für Extremum

Satz $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$.
Wenn f in $\underline{x}$ ein lok. Max hat
und f in $\underline{x}$ ~~partiell~~ diffbar ist,
dann ist $\operatorname{grad} f = 0$.

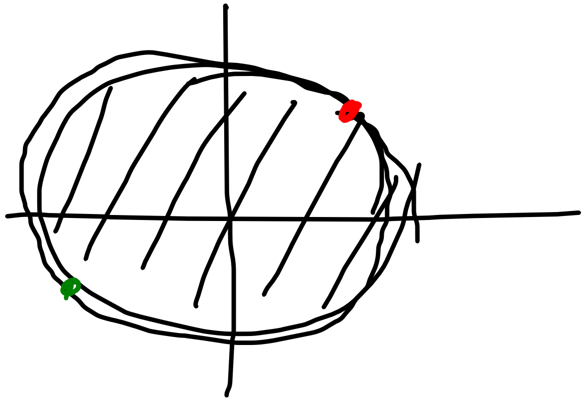
Def $\underline{x} \in U$ heißt globales Maximum von $f : U \to \mathbb{R}$
$\iff \forall \underline{y} \in U : f(\underline{y}) \leq f(\underline{x})$

$\underline{x} \in U$ heißt lokales Max. von f
$\iff \exists \delta > 0 : \underline{x}$ ist globales Max. auf $B_\delta(\underline{x}) \cap U$.

Korollar Für $f: U \to \mathbb{R}$ gilt eine der folgenden Möglk.:

1) f nimmt (globales) Max. bei $\underline{x} \in U$, und $\underline{x}$ liegt
   a) auf ∂U
   b) oder an einem nicht-diffbaren Pkt in $\mathring{U}$
   c) oder an einem Pkt mit $\operatorname{grad} f = 0$ in $\mathring{U}$.

2) f nimmt kein Max. an, aber $\exists$ Folge (x_n) in U mit $f(x_n) \longrightarrow \sup_U f \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und
   a) $\|x_n\| \longrightarrow \infty$
   b) oder $x_n \to x \in \partial U$
   c) oder $x_n \to x \in \mathring{U}$, aber f ist nicht st. in x.



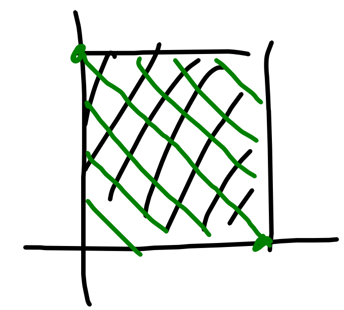
A) Lagrange-Methode
"Optimierung unter Nebenbed." ($x^2+y^2=1$)

B) Parametrisiere ∂U,
z.B. $(x,y) = (\cos t, \sin t)$

$$f(x,y) = x^3 y^2$$

$$f(\cos t, \sin t) = \cos^3 t \, \sin^2 t$$

Bsp

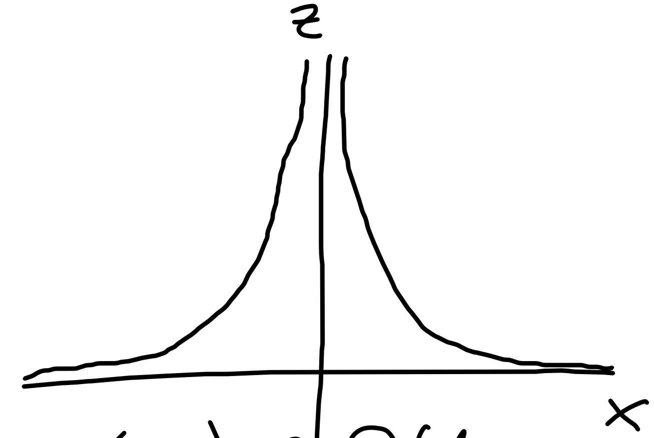


i) $g(x,y) = x+y$ für $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$

nimmt Max. bei $(1,1)$ an.

aber $\operatorname{grad} g = (1,1) \neq 0$ Fall 1a

ii) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ auf $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$



hat kein globales Max.

hat $\sup_U f = \infty$ (Beweis: $\underline{x}_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \to (0,0) \in \partial U$.

$f(\underline{x}_n) = n^2 \xrightarrow{n\to\infty} \infty$)

Fall 2b.

Besitzt f ein lok. Max.?

Nein: Nie 1a, nie 1b, nie 1c.

$\operatorname{grad} f = -\dfrac{2\underline{x}}{\|\underline{x}\|^4} \neq 0$.

<u>Bem</u> Problem "Max. f" ist äq. zu dem Problem "Max f^2" (falls $f \geq 0$)

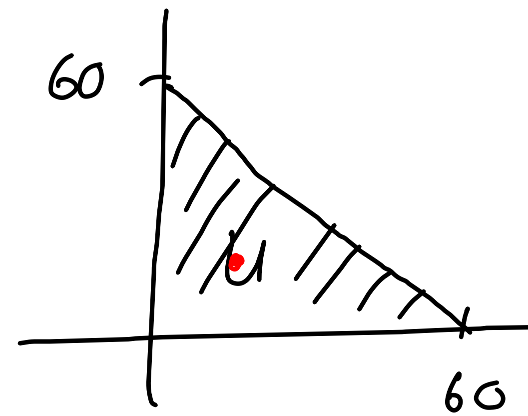
oder "Max. $\sqrt{f}$" (falls $f \geq 0$) oder "Max. $\ln(f)$" (falls $f > 0$)

oder "Max. e^f".

Aufgabe Bestimme $a, b, c \geq 0$, deren Summe $= 60$ ist und deren Produkt maximal ist.

Anleitung: $c := 60 - a - b$, $U = \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \leq a \leq 60 \\ 0 \leq b \leq 60 \\ a+b \leq 60 \end{array} \right\}$

$$f(a,b) = ab(60-a-b)$$



Lösung: $\exists$ max? Ja, weil f st. und U kompakt.

Wo? 1c) $\dfrac{\partial f}{\partial a} = b(60-a-b) - ab$, $\dfrac{\partial f}{\partial b} = a(60-a-b) - ab$

$$0 = \operatorname{grad} f \iff \{a = c \text{ und } b = c\}$$
$$\iff \{a = 20, b = 20, c = 20\}$$

$$f(20,20) = \cancel{1200}\; 20^3 = 8000$$

1b) nicht diffbar: nie

1c) Werte auf ∂U? alle 0 $\Rightarrow$ kein Max. auf ∂U.

Fazit: $\sup_U f = 20^3 = \max_U f = f(20,20)$.

$(20,20)$ ist gl. Max. (lok. Max.)

das einzige