Lok. Extrema

Notw. Bed.: (Prop. 5.9) $f \in C^1(\underset{\substack{\cup \\ \mathbb{R}^n}}{G} \text{ offen}, \mathbb{R})$

$\underset{\substack{\cup \\ G}}{\underline{x}}$ lok. Extr. von $f \Rightarrow \nabla f(\underline{x}) = 0$

Hinr. Bed.: (Satz 5.12, "2te-Abl.-Test")

$f \in C^2(\underset{\substack{\cup \\ \mathbb{R}^n}}{G} \text{ offen}, \mathbb{R})$, $\underline{x} \in G$, $\nabla f(\underline{x}) = 0$.

a) $\operatorname{Hess} f(\underline{x})$ pos. def. $\Longrightarrow$ f hat striktes lok. Min ~~.~~ in $\underline{x}$

b) $\operatorname{Hess} f(\underline{x})$ neg. def. $\Longrightarrow$ Max.

c) $\operatorname{Hess} f(\underline{x})$ indef. $\Longrightarrow$ kein Extr. ~~.~~ in $\underline{x}$.

~~Bem~~ Def A pos. def. $\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}: \langle x, Ax \rangle > 0$.

pos. semidef. $\Longleftrightarrow$ ≥ 0

indefinit $\Longleftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{R}^n: \langle x, Ax \rangle > 0, \langle y, Ay \rangle < 0$,

Bem $A = A^T$ diagbar durch ONB, $\tilde{x}$

$$\langle x, Ax \rangle = \langle \tilde{x}, \underbrace{\operatorname{diag}(\alpha_1 .. \alpha_n)}_{\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}} \tilde{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{x}_i^2$$

A pos. def. $\Longleftrightarrow$ $\forall \alpha_i > 0$

pos. semidef. $\Longleftrightarrow$ $\forall \alpha_i \geq 0$

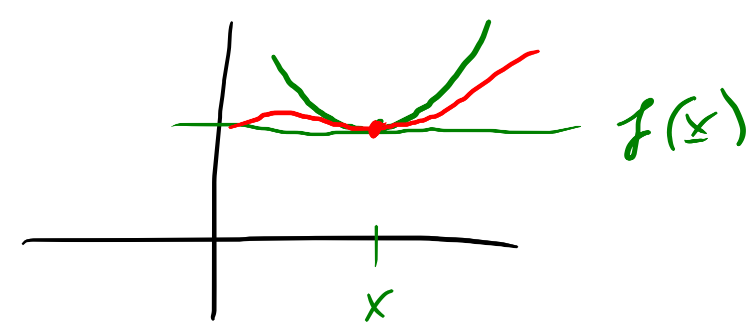
indefinit $\Longleftrightarrow$ $\exists \alpha_i > 0 \; \exists \alpha_j < 0$.

Bew von Satz 5.12:

a) Hess $f(\underline{x})$ pos. def., $\min\{\alpha_1 .. \alpha_n\} =: \alpha_1 > 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum \alpha_i \tilde{x}_i^2}_{\langle x, Ax \rangle} \geq \alpha_1 \|\underline{\tilde{x}}\|^2 = \alpha_1 \|\underline{x}\|^2$$

$A = \text{Hess } f(\underline{x})$



$\exists\, B_\delta(\underline{x}) \subset G$. Kor 5.6 $\Longrightarrow$

$$\forall\, \underline{h} \in B_\delta(\cancel{\underline{x}}\,\underline{0}): \quad f(\underline{x}+\underline{h}) = f(\underline{x}) + \frac{1}{2}\langle \cancel{\underline{x}}\,\underline{h}, \operatorname{Hess} f(\underline{x})\, \underline{h}\rangle + \varphi(\underline{h}),$$

$$\varphi(\underline{h}) = o(\|\underline{h}\|^2).$$

Wähle $0 < \delta' < \delta$ so, dass

$$\forall\, \underline{h} \in B_{\delta'}(\underline{0}): \quad |\varphi(\underline{h})| \leq \frac{\alpha_1}{4}\|\underline{h}\|^2$$

(α_1 = kleinster EW)

$$\Longrightarrow \forall\, \underline{h} \in B_{\delta'}(\underline{0}) \setminus \{\underline{0}\}: \quad f(\underline{x}+\underline{h}) =$$

$$= f(\underline{x}) + \frac{1}{2}\langle \underline{h}, \operatorname{Hess} f(\underline{x})\, \underline{h}\rangle + \varphi(\underline{h})$$

$$\geq f(\underline{x}) + \frac{1}{2}\alpha_1\|\underline{h}\|^2 - \frac{\alpha_1}{4}\|\underline{h}\|^2$$

$$= f(\underline{x}) + \frac{\alpha_1}{\cancel{2}\,4}\|\underline{h}\|^2 > f(\underline{x})$$

b) analog.

c) ~~Wähle~~ $\operatorname{Hess} f(\underline{x})$ indefinit

Wähle $\underline{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ so, dass

$$\alpha := \langle \underline{h}, \operatorname{Hess} f(\underline{x})\, \underline{h} \rangle > 0$$

$t > 0$, klein genug

$$f(\underline{x} + t\underline{h}) = f(\underline{x}) + \frac{1}{2} \langle \cancel{t}\underline{h}, \operatorname{Hess} f(\underline{x})\, \cancel{t}\underline{h} \rangle t^2 + \varphi(t\underline{h})$$

$$\frac{|\varphi(t\underline{h})|}{\cancel{\|t\underline{h}\|^2}} \le \frac{\alpha}{4 \cancel{\|\underline{h}\|^2}} t^2 \quad \text{für } t \text{ klein genug}$$

$$f(\underline{x} + t\underline{h}) \ge f(\underline{x}) + \frac{\alpha}{2} t^2 - \frac{\alpha}{4} t^2 = f(\underline{x}) + \frac{\alpha}{4} t^2 > f(\underline{x}).$$

also $\forall$ Umg U von $\underline{x}$ $\exists\, \underline{y} = \underline{x} + t\underline{h} \in U$: $f(\underline{y}) > f(\underline{x})$

$\Rightarrow$ kein lok. Max.

Entspr. kein lok. Min.

$\square$

<u>Bsp 5.14</u> a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\nabla f = (2x, 2y)$

$\nabla f = 0 \iff (x,y) = (0,0)$

$\operatorname{Hess} f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ pos. def. $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ striktes lok. Min. in $(0,0)$.

b) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

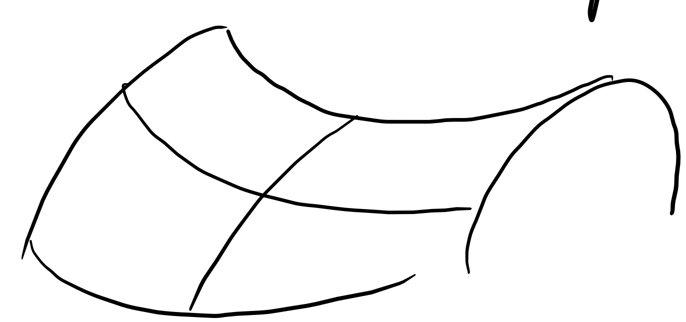
$\nabla f = (2x, -2y)$, $\nabla f = 0 \iff (x,y) = (0,0)$

$\operatorname{Hess} f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ indef.

$\Rightarrow$ f hat kein lok. Extremum

Sattelpunkt in $(0,0)$.

"Sattelfläche"



Bem 5.15 Wenn ~~f~~ $\operatorname{Hess} f(\underline{x})$ pos. semidef.,
aber nicht pos. def. bei $\underline{x}$ mit $\nabla f(\underline{x}) = 0$,
dann kann der 2te-Abl.-Test nicht entscheiden,
ob $\exists$ Min.

Bsp: (i) $f(x,y) = x^2 + y^4$ hat $\nabla f(0,0) = 0$

$$\operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und striktes lok. Min. bei $(0,0)$.

(ii) $f(x,y) = x^2 + y^3$ hat $\nabla f(0,0) = 0$

$$\operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aber kein lok. Extr. bei $(0,0)$

(iii) $f(x,y) = x^2$ hat $\nabla f(0,0) = 0$

$$\operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und entartetes (d.h. nicht striktes) lok. Min bei $(0,0)$.

Also für $f \in C^2(G, \mathbb{R})$:

$$\left.\begin{array}{l} \nabla f(\underline{x}) = 0 \\ \text{Hess}\, f(\underline{x}) \text{ pos. semidef} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \not\Rightarrow \\ \Leftarrow \end{array} \begin{array}{l} \text{lok. Min} \\ \text{bei } \underline{x} \end{array}$$

Kap. 6: Implizite Funktionen

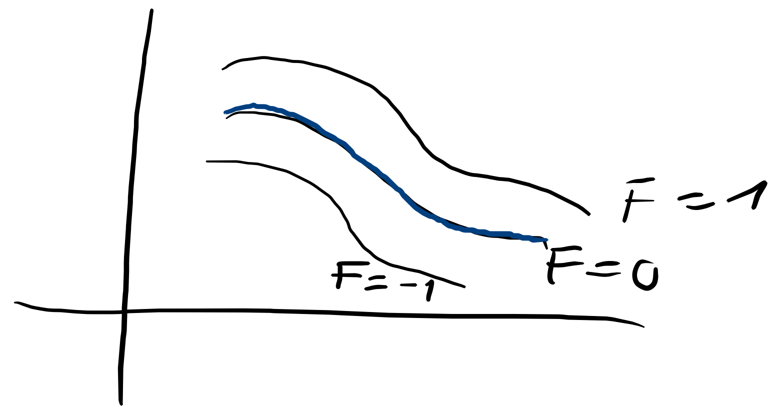
[Cauchy 1821, Dini 1878]

$F(x,y)=0$

Höhenlinie

$y = g(x)$.

↑ implizite Funktion



Bsp $e^{\sin(xy)} + x^2 + 2y + 1 = 0$

$\nexists$ Formel für g, aber $\exists g$

Bsp Spezialfall Umkehrfkt $F(x,y) = x - f(y)$

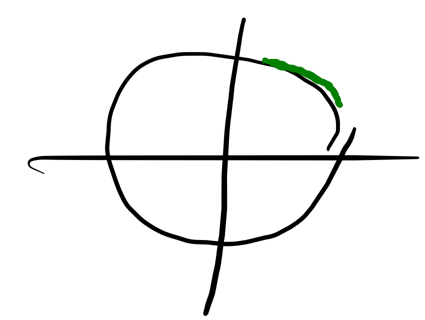
Der Satz über impl. Fktnen macht (unter Ann. an F) 3 Aussagen über g:

1) Ex. und Eind. (lokal)

2) Regularität (g st. diffbar)

3) Berechnung von g'
   (nutzt, selbst wenn g explizit)

<u>Bsp 6.1</u> $\quad F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

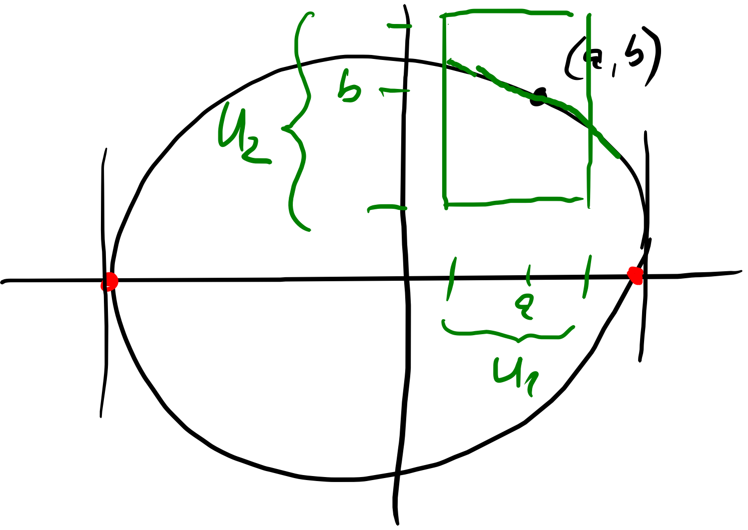


$C := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0 \} = \text{Kreis}$

$\neq$ Graph einer Fkt $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denn

a) $|x| > 1 \;\Rightarrow\; \nexists\, y : (x,y) \in C$

b) $|x| < 1 \;\Rightarrow\; \exists_2\, y : (x,y) \in C, \quad y = \pm\sqrt{1-x^2}$



Gib $(a,b) \in C$ vor, wählt Zweig aus („lokale Fortsetzung"):

$\exists$ Umg U_1 von a

$\exists$ Umg U_2 von b

$\exists\, g: U_1 \to U_2 \;\forall (x,y) \in U_1 \times U_2$:

$$F(x,y) = 0 \iff y = g(x)$$

Dabei $g(a) = b$.

Für $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ richtig, außer bei $(a,b) = (1,0)$ oder $(-1,0)$

(wo Tangente vertikal) ($\nexists\, g$ auf Umg von a)

Vorüberlegung $\quad F(x, g(x)) = 0$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big(F(x, g(x))\Big) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x,g(x))} + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x,g(x))} \frac{dg}{dx} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dg}{dx} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}$$

Jetzt $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $F(x,y) \in \mathbb{R}^m$

(passende Anz. Gl.en)

Jacobi-Matrix

$$DF = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \\ \vdots & & & \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} X & Y \end{array}\right) \in M(m \times (n+m), \mathbb{R})$$

6.2 Satz über implizite Funktionen

Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$ offen,

$F \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$

$(a,b) \in G$, $F(a,b) = 0$, und

$Y(a,b) = D_y F\big|_{(a,b)}$ inv. bar.

Dann $\exists$ Umg U_1 von a $\exists$ Umg U_2 von b mit $U_1 \times U_2 \subset G$ so, dass

1) $\exists_1\, g : U_1 \to U_2 : \forall (x,y) \in U_1 \times U_2$:

$$F(x,y) = 0 \iff y = g(x)$$

2) $g \in C^1(U_1, \mathbb{R}^m)$

3) $Y(x,y)$ ist überall in $U_1 \times U_2$ inv. bar, und

$$= D_x F = \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right)_{ij}$$

$$Dg\big|_x = -\, Y^{-1}(x, g(x))\; X(x, \cancel{y}) \, .$$

$g(x)$

Bem 6.3 a) $Y(a,b)$ invertierbar

$\iff \det Y(a,b) \neq 0$

$\iff \underbrace{Y(a,b)v}_{\frac{\partial F}{\partial(0,v)}} \neq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Daher $F(a,y) = 0 \iff y = b$ $\forall y \in \text{Umg}(b)$.

c) $F \in C^k \Rightarrow g \in C^k$.