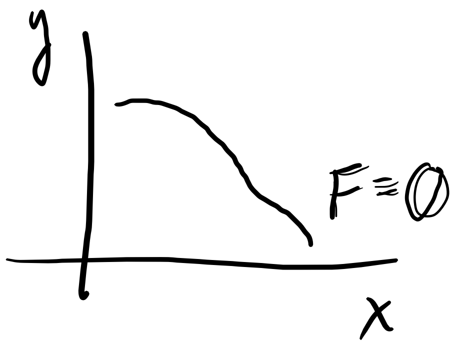


$$y = g(x) \iff F(x,y) = 0$$

Satz über implizite Fktnen

Sei $G \subset \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$ offen, $F \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$,

$(a,b) \in G$, $F(a,b) = 0$, $Y(a,b) = D_y \overset{F}{\cancel{f}}\big|_{(a,b)}$ inv.bar,

Dann $\exists$ Umg U_1 von a $\exists$ Umg U_2 von b mit $U_1 \times U_2 \subset G$

So, dass 1) $\exists_1\, g : U_1 \to U_2 : \forall (x,y) \in U_1 \times U_2$:

$$F(x,y) = 0 \iff y = g(x)$$

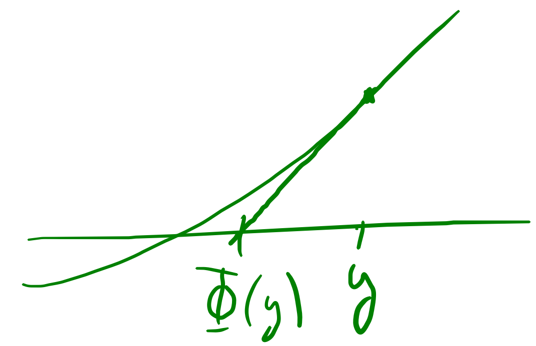
2) $g \in C^1(U_1, \mathbb{R}^m)$

3) $Y(x,y)$ ist in $U_1 \times U_2$ inv.bar, und

$$Dg\big|_x = -Y^{-1}(x, g(x))\, X(x, g(x)).$$

Beweis 1) $Y_0 := Y(a,b)$ (inv.bar)

$F(x,y)=0$ Newton-Verfahren



Def. $\Phi(x,y) := y - Y_0^{-1}F(x,y)$

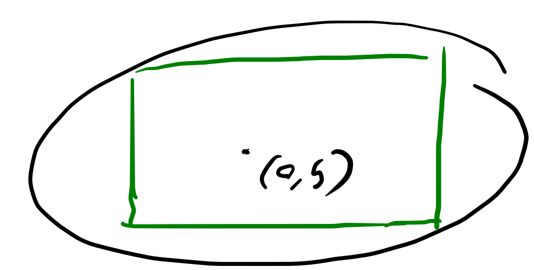
$\Phi: G \to \mathbb{R}^m$

Dann: $F(x,y)=0 \iff Y_0^{-1}F(x,y)=0 \iff \Phi(x,y)=y$

Wollen Banachs Fixpunktsatz anwenden.

Ist $\Phi(x,\cdot)$ Kontraktion?

$$\left\| D_y\Phi\big|_{(x,y)} \right\| < \frac{1}{2} \text{ in } \underbrace{\text{einer Umg. von } (a,b)}_{\supset\, \overline{B}_{r_1}(a)\times\overline{B}_{r_2}(b)} \quad \text{konvex}$$



$F\in C^1$ also $\Phi\in C^1$

$$D_y\Phi\big|_{(a,b)} = E - Y_0^{-1}\underbrace{D_yF\big|_{(a,b)}}_{Y_0} = 0$$

Lipschitz-Bed für $\Phi(x,\cdot)$

Schrankensatz $\Longrightarrow$ $\|\Phi(x,y)-\Phi(x,y')\| \le \frac{1}{2}\|y-y'\|$ $(*)$

$$\forall x\in\overline{B_{r_1}}(a)\ \forall y,y'\in\overline{B_{r_2}}(b)$$

Brauchen: Selbst-Abb. $\Phi(x,\overline{B_{r_2}}(b))\subset\overline{B_{r_2}}(b)$

Bew: $\|\Phi(x,y)-b\| \le \underbrace{\|\Phi(x,y)-\Phi(x,b)\|}_{\overset{(*)}{\le}\frac{1}{2}\underbrace{\|y-b\|}_{\le r_2}} + \underbrace{\|\Phi(x,b)-b\|}_{\le\frac{1}{2}r_2 \text{ für } x \text{ nahe genug bei } a,}$

weil $\Phi(a,b)=b$
und Φ st.

Also OK für $x\in\overline{B_{r_3}}(a)$.

BFPS $\Longrightarrow$ $\forall x\in\overline{B_{r_3}}(a)\ \exists_1\, y =: g(x):\ F(x,y)=0$.

2) <u>g st.</u>:

Ψ = "Φ für Fktnen", $\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \left\{ h \in \underbrace{C(\overline{B}_{r_3}(a), \mathbb{R}^m)}_{\text{Banachraum mit } \|\cdot\|_\infty} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Bild}(h) \subset \overline{B_{r_2}}(b) \\ h(a) = b \end{array} \right\} \text{ abg.}$$

$$\Psi(h)(x) = \Phi(x, h(x))$$

Ψ ist Kontraktion, weil

$$\|\Psi(h_1) - \Psi(h_2)\|_\infty = \sup_{x \in \overline{B}_{r_3}(a)} |\Phi(x, h_1(x)) - \Phi(x, h_2(x))|$$

$$\overset{(*)}{\leq} \sup_{x \in \overline{B}_{r_3}(a)} \frac{1}{2} |h_1(x) - h_2(x)| = \frac{1}{2} \|h_1 - h_2\|_\infty$$

mit Fixpunkt $\Psi(h) = h \iff \forall x \in \overline{B_{r_3}}(a) : \Phi(x, h(x)) = h(x) \iff h(x) = g(x)$

$\overset{\text{BFPS}}{\Longrightarrow} g \in \mathcal{A} \Rightarrow g$ st.

$\underline{g \in C^1}$ siehe Skript.

3) $\underline{Dg}$: $\quad 0 = F(x, g(x))$

Kettenregel $\Rightarrow$ $\quad 0 = D_x \left[F(x, g(x)) \right]$

$$= \underbrace{D_x F}_{X}\Big|_{(x,g(x))} + \underbrace{D_y F}_{Y}\Big|_{(x,g(x))} Dg\big|_x$$

$$\Rightarrow \quad Dg\big|_x = - Y^{-1}(x, g(x))\, X(x, g(x)).$$

wenn $\exists\, Y^{-1}(x, g(x))$

$\left\{ \begin{array}{l} Y \text{ st.}, \quad \det \text{ st.} \\ \exists\, Y^{-1}(a,b) \end{array} \right.$ $\quad$ [oder $\overbrace{GL(n, \mathbb{K})}^{=\{\text{inv.bar}\}}$ offen in $M(n, \mathbb{K})$]

$\Rightarrow \quad \exists\, Y^{-1}(x,g)$ in Umg. von (a,b) $\quad \square$

Bsp 6.4 Niveauflächen $N_c = \{ x \in G \,/\, f(x) = c \}$

$G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \to \mathbb{R}$ C^1. Wenn $\nabla f(a) \neq 0$ für $a \in N_c$, dann ist N_c in einer Umg von a der Graph einer C^1-Fkt g von $n-1$ Variablen.

Beweis O.B.d.A $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0$, $y := x_n$

$\bar{x} := (x_1 \dots x_{n-1})$

$$F(\bar{x}, y) = f(\bar{x}, y) - c, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{a}, a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}, a_n) \neq 0.$$

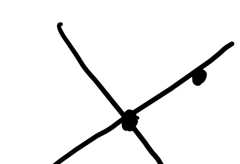
$\overset{SIF}{\Longrightarrow}$ Beh. $\square$

Nicht wo $\nabla f = 0$: a) bei $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

ist $N_0 = \{\underline{0}\}$

b) bei $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$

ist $N_0 = \{ |x_1| = |x_2| \}$



Lokale Umkehrbarkeit

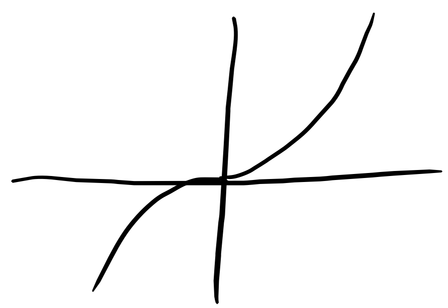
Def 6.5 Seien $G, D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to D$ heißt <u>Diffeomorphismus</u>, wenn

1) f bij
2) $f \in C^1(G, D)$
3) $f^{-1} \in C^1(D, G)$

oder C^k, C^∞

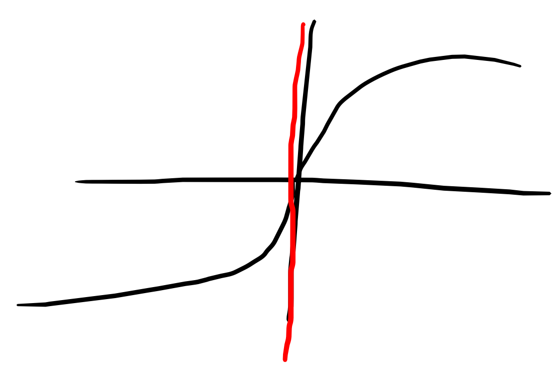
(Vgl. Homöomorphismus)
homeomorphism

Bsp $f(x) = x^3$



1) bij, 2) C^1

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & \text{falls } y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{|y|} & \text{falls } y < 0 \end{cases}$$



ist nicht diffbar in 0.

<u>Bsp</u> Thermodynamik

$M = \{$ Gleichgewichtszustände $\}$

kann param. werden durch (S, V, N)

wobei $S =$ Entropie

$V =$ Volumen

$N =$ Teilchenzahl (approx. kontinuierlich)

$=$ Anz. Moleküle

$(S, V, N) : M \longrightarrow (0, \infty)^3$ Koordinatensystem.

$T : M \to (0, \infty)$ Temperatur

$p : M \to (0, \infty)$ Druck

$(T, p, N) : M \to (0, \infty)^3$ Koo. syst.

$(T, p, N) \circ (S, V, N)^{-1} : (0, \infty)^3 \longrightarrow (0, \infty)^3$ i. d. R. Diffeo.

Bem $f_1 : G \to D$ Diffeo

$f_2 : D \to H$ Diffeo

$\Rightarrow f_2 \circ f_1 : G \to H$ Diffeo.

Bem 6.6 $D(f^{-1})\big|_{f(x)} = \left(Df\big|_x\right)^{-1}$ wenn $f^{-1} \in C^1$.

Bew $id = f^{-1} \circ f \overset{\text{Kettenr.}}{\Longrightarrow} E = D(f^{-1} \circ f)\big|_x$

$= D(f^{-1})\big|_{f(x)} \, Df\big|_x .$ $\square$

6.8 Satz über die Umkehrabb.

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$, $b \in G$

$Df|_b \in M(n, \mathbb{R})$ inv.bar. Dann $\exists$ Umg von b, $U \subset G$:

$$f|_U : U \to f(U) \text{ ist Diffeomorphismus.}$$

Bew $a := f(b)$, $F(x,y) := x - f(y)$.

also $F(x, g(x)) = 0 \iff x - f(g(x)) = 0 \iff g = f^{-1}$.

$$F : \mathbb{R}^n \times G \to \mathbb{R}^n, \quad Y_0 = D_y F\big|_{(a,b)} = \underbrace{-Df|_b}_{\text{inv. bar}}$$

$\overset{\text{SIF}}{\Longrightarrow}$ $\exists U_1 \subset \mathbb{R}^n \; \exists U_2 \subset G \; \exists g : U_1 \to U_2 \; C^1 : \forall (x,y) \in U_1 \times U_2$:

$$F(x,y) = 0 \iff y = g(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = f(y), \quad U := g(U_1) \Longrightarrow U \text{ offen} \Rightarrow \text{Beh.} \; \square$$

Bsp 6.9 Kugelkoordinaten

$$f(r,\vartheta,\varphi) = (r\sin\vartheta\cos\varphi,\ r\sin\vartheta\sin\varphi,\ r\cos\vartheta)$$

$$f : [0,\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3.$$

$$G : (0,\infty) \times (0,\pi) \times \underset{\textstyle\cancel{(0,2\pi)}}{(-\pi,\pi)}$$

Beh $f|_G$ ist Diffeo $G \to f(G)$

Bew $\det\left(Df|_{(r,\vartheta,\varphi)}\right) = r^2 \sin\vartheta \neq 0$ auf G

$\Rightarrow$ $f|_G$ ist lokal Diffeomorphismus

$f|_G$ inj. (geometrisch) $\Rightarrow$ $f|_G : G \to f(G)$ bij.

$f|_G \in C^1$

$(f|_G)^{-1} \in C^1$ weil das lokal so ist. $\Rightarrow$ $f|_G$ Diffeo. $\square$