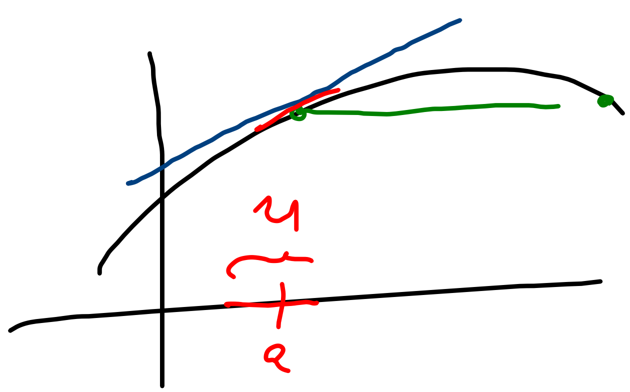
Umkehrfkt

Satz $a \in G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$.

Wenn $Df(a)$ inv.bar, dann

$\exists$ Umg U von a: $f|_U : U \to f(U)$ Diffeo.

Eine Essenz: ~~Ei~~ Wenn $Df(a)$ bij, dann f lokal bij.



Beweis SIF

$$F(x,y) = x - f(y)$$

$$F(x,y) = 0 \iff y = g(x)$$

□

Analoge Essenz aus dem SIF:

Lösungsmenge von k Gl.en in $\mathbb{R}^n$
hat dim = $n-k$,
vorausgesetzt, F ist regulär, D_yF regulär (invertierbar)

$GL(n,\mathbb{R}) \subset M(n,\mathbb{R})$ offen und dicht.

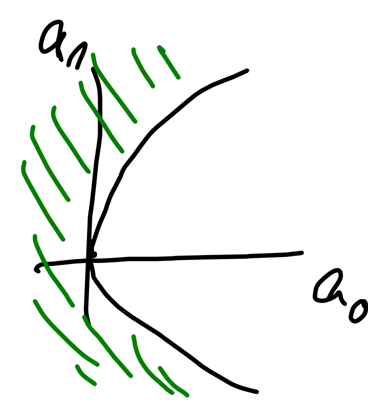
SIF

Bsp: Die Nullstellen eines Polynoms hängen lokal ∞f. diffbar von den Koeff. ab.

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

$$P(x) = x^2 + a_1 x + a_0$$

$$x_{Nst} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$$



Anwendung des SIF (Teil 3)

$$0 = F(x, g(x)) \xrightarrow{d/dx} 0 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dg}{dx}$$

Problem: Sei $g: GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$
$g(A) = A^{-1}$. Bestimme $Dg(A)$.

$$F(A,B) = AB - E = 0 \iff B = g(A)$$

$$E = Ag(A) \implies$$

$$E = (A+\delta A)\, g(A+\delta A)$$

$$= (A+\delta A)\big(g(A) + Dg(A)(\delta A) + o(\|\delta A\|)\big)$$

$$= Ag(A) + \delta A\, g(A) + A\, Dg(A)(\delta A) + \underbrace{\underbrace{\delta A\, Dg(A)(\delta A)}_{O(\|\delta A\|^2)} + o(\|\delta A\|)}_{o(\|\delta A\|)}$$

$$0 \quad \cancel{E} = \cancel{E} + \underbrace{\delta A\, g(A) + A\, Dg(A)(\delta A)}_{0} + \underbrace{o(\|\delta A\|)}_{0}$$

$$0 = \delta A \, A^{-1} + A \, Dg(A)(\delta A)$$

$$\Rightarrow Dg(A)(\delta A) = \underline{- A^{-1} \, \delta A \, A^{-1}}$$

Vgl. $f(x) = x^{-1}$. $\quad Df(x)(\delta x) = - \frac{1}{x^2} \delta x$

Taylor-Entwicklung

Aufgabe $\quad g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n, \quad f(x,y) = g(x+y).$

Wie lautet die Taylor-Reihe von f um $(0,0)$?

Lösung: $\quad f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x+y)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} c_n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

binom. Lehrsatz $\quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

$$f(x,y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} \, x^i y^j$$

$$= \sum_{i,j=0}^{\infty} \overbrace{c_{i+j} \binom{i+j}{i}} \, x^i y^j .$$

2te-Ableitungs-Test

Satz Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $x \in U$, $\operatorname{grad} f(x) = 0$, $\operatorname{Hess} f(x) = A$

- A pos. def. $\Rightarrow$ str. lok. Min.
- A neg. def. $\Rightarrow$ str. lok. Max.
- A indefinit $\Rightarrow$ kein lok. Extremum
- 0 ist EW von A $\Rightarrow$ kein allg. Aussage mögl.

Umgekehrt (Beweis ähnlich):

- lok. Min. $\Rightarrow$ A pos. semidef.
- lok. Max. $\Rightarrow$ A neg. semidef.

<u>Bem</u> Wenn $f \notin C^2$, aber $\exists\, \partial_i f(x) = 0 \;\forall i \in \{1,..,n\}$, dann ist kein allg. Aussage mögl.

<u>Aufgabe</u>: Wieso ist

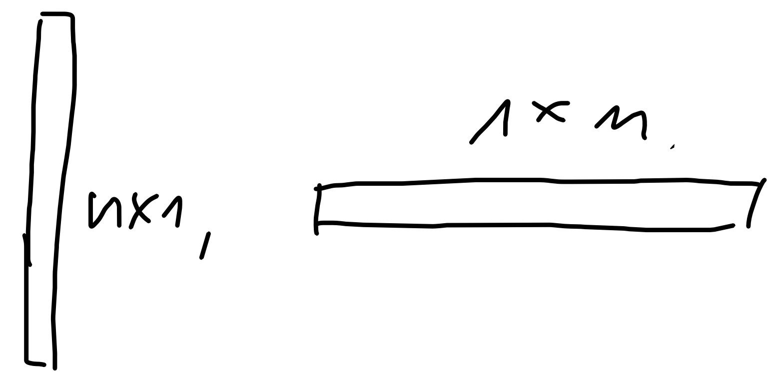
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -7 \\ 5 & -1 & 0 \\ -7 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

indefinit?

$$\left.\begin{array}{l} \langle e_2, A e_2 \rangle = -1 < 0 \\ \langle e_3, A e_3 \rangle = 9 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{indefinit}$$

Gradient und Dualraum

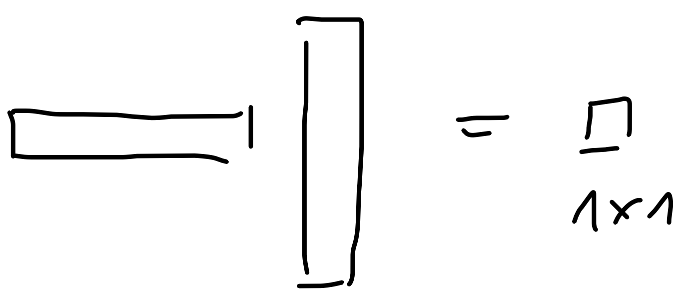
Vektor vs. Kovektor
Raum vs. Dualraum
Spalte vs. Zeile



Vektor $\in V$

Kovektor = Linearform $V \to \mathbb{R}$

Dualraum $V' = \{\text{Kovektoren}\} = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$



Skalarprodukt def. Identifikation $V \to V'$

$$v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$$

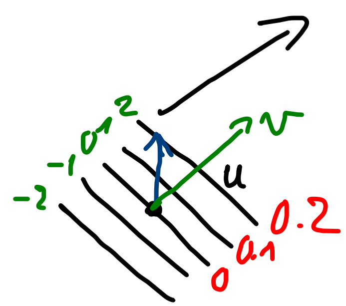
Von Natur aus ist grad $f(x)$ ein Kovektor.

$$f : V \to \mathbb{R}$$

$$Df(x) : V \to \mathbb{R} \text{ lin.}, \quad Df(x) \in V'$$

Vektor

Kovektor



$$V \to \mathbb{R}$$

$V' \ni u$, $\quad u(v) \in \mathbb{R}$ $\qquad u = \langle v, \cdot \rangle$