Extrema unter Nebenbed.

Problem: optimiere $f : \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}$

in der Menge $M = \{ x \in G \mid h(x) = 0 \}$

$h : G \to \mathbb{R}$

Bsp: Optimiere $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ in $\overline{B_r(0)}$

Max. im Innern $\Rightarrow \nabla f(x_0) = 0$

Max. auf dem Rand?

Vorgehen 1: wenn M parametrisiert werden kann,

z. B. Kreis $\partial B_r(0) = \left\{ \begin{pmatrix} r \cos\varphi \\ r \sin\varphi \end{pmatrix} \middle| \ \varphi \in [0, 2\pi) \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \pm\sqrt{1 - x^2} \end{pmatrix} \middle| \ x \in [-r, r] \right\}$$

(allg. $M = \{ u(\varphi) \mid \varphi \in I \}$)

setze $v(\varphi) = f(u(\varphi))$, optimiere v auf I

(Bsp. $\overline{B_r(0)}$: finde Pkte mit $v'(\varphi) = 0$
vgl. mit $v(0)$ und $v(2\pi)$)

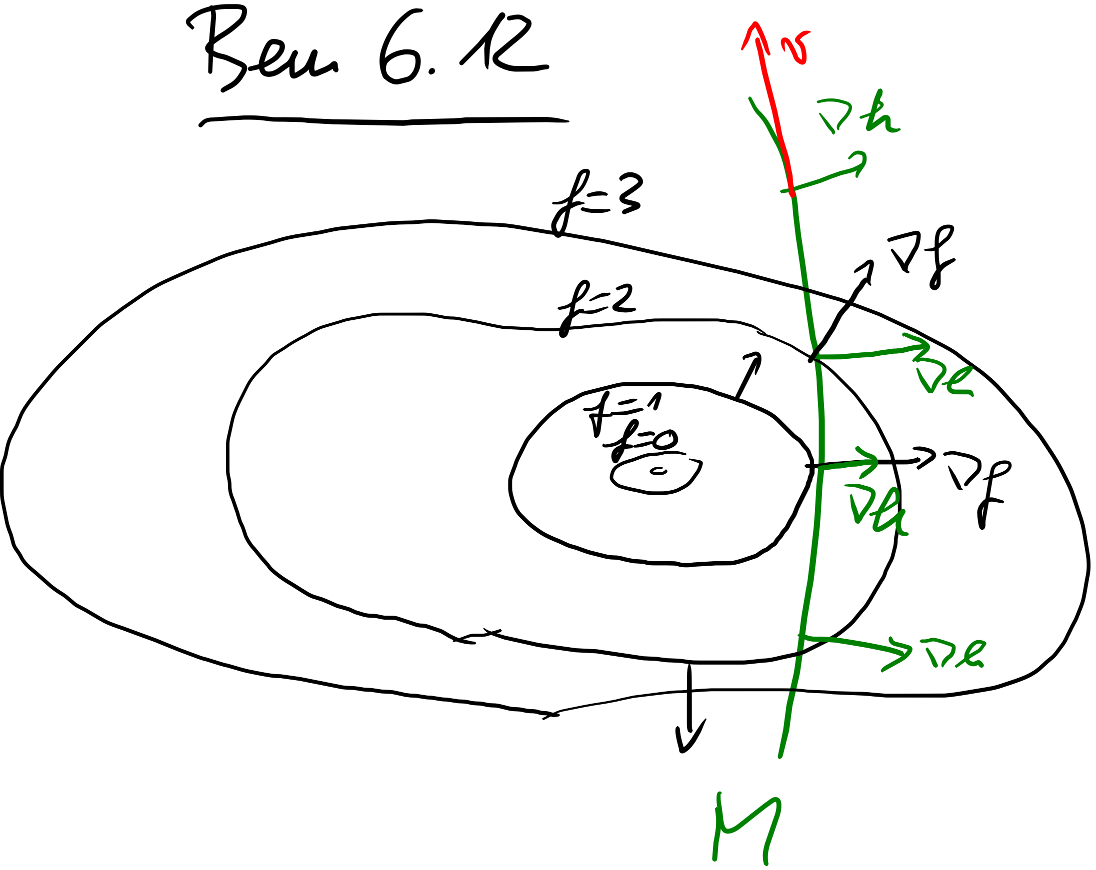
Vorgehen 2: Lagrange-Multiplikator-Methode
erfordert keine expl. Kenntnis von u.

6.11 Satz über Extrema unter Nebenbed.

Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, h \in C^1(G)$, $a \in M = \{ x \in G \mid h(x) = 0 \}$.
$f|_M$ habe ein lok. Extr. in a ("f hat lok. Extr. unter der Nebenbed. $h(x) = 0$ in a")
und $\nabla h(a) \neq 0$. Dann

gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ ("Lagrange-Multiplikator")
mit $$\nabla f(a) = \lambda \, \nabla h(a)$$
("Lagrange-Bed.").

<u>Bem 6.12</u>



Wenn $\nabla f \nparallel \nabla h$, dann kann man entlang M den Wert von f erhöhen und erniedrigen.

Anders gesagt: Wenn $f|_M$ lok. Extr. in a hat, dann

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0} \quad \forall \, \underbrace{v \text{ tangential an } M.}$$

Also $\langle v, \nabla f(a) \rangle = 0 \Longleftarrow \langle v, \nabla h(a) \rangle = 0$

$\nabla h(a) \neq 0$

$$\Longrightarrow \qquad \nabla f(a) \parallel \nabla h(a).$$

<u>Beweis des Satzes</u> $\quad \nabla h(a) \neq 0$, oBdA $\frac{\partial h}{\partial x_n}(a) \neq 0$.

$x = (\overline{x}, x_n)$, $\overline{x} = (x_1 \dots x_{n-1})$

$a = (\overline{a}, a_n)$, $\overline{a} = (a_1 \dots a_{n-1})$

SIF $\Rightarrow$ $\exists$ Umg V von $\overline{a}$, I von a, $V \times I \subset G$,

$g \in C^1(V, I)$ $\forall (\overline{x}, x_n) \in V \times I$:

$$h(\overline{x}, x_n) = 0 \iff x_n = g(\overline{x}).$$

$f|_M$ hat lok. Extr. in a $\Rightarrow$ $f(\overline{x}, g(\overline{x}))$ hat lok. Extr. in $\overline{a}$.

$\varphi(\overline{x}) = (\overline{x}, g(\overline{x}))$, $\quad f(\overline{x}, g(\overline{x})) = f \circ \varphi(\overline{x})$.

$$\Longrightarrow \quad \nabla(f \circ \varphi)(\overline{a}) = 0,$$

Kettenregel: $\forall i \in \{1, \ldots, \cancel{n}\ n-1\}$

$$0 = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_i}(\bar{a}) = \sum_{j=1}^{\cancel{n-1}\ n} \frac{\partial f}{\partial x'_j}(\varphi(\bar{a})) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\bar{a})$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x'_i}(\underbrace{\varphi(\bar{a})}_{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underbrace{\varphi(\bar{a})}_{a}) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{a}) . \quad (*)$$

Wegen $(h \circ \varphi)(\bar{x}) = 0 \quad \forall \bar{x} \in V$ gilt

$$0 = \frac{\partial (h \circ \varphi)}{\partial x_i}(\bar{a}) = \partial_i h(a) + \partial_n h(a) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{a})$$

$$\partial_n h(a) \neq 0 \implies \frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{a}) = -\left(\partial_n h(a)\right)^{-1} \partial_i h(a) \quad (**)$$

Setze $\lambda := \dfrac{\partial_n f(a)}{\partial_n h(a)}$. Dann $\underline{\underline{\partial_n f(a) = \lambda\, \partial_n h(a)}}$

und $\forall i \in \{1 \dots n-1\}$:

$$(*) \overset{(**)}{\Longrightarrow} \quad 0 = \partial_i f(a) + \partial_n f(a) \left(-(\partial_n h(a))^{-1} \partial_i h(a) \right)$$

$$= \partial_i f(a) - \underbrace{\frac{\partial_n f(a)}{\partial_n h(a)}}_{\lambda} \partial_i h(a)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\partial_i f(a) = \lambda \, \partial_i h(a)}} \, . \qquad \square$$

<u>Bsp</u> Maximiere $f(x,y) = y^2 - x^2$ auf $\overline{B_1(0)} =: K$

f st., K kompakt $\Rightarrow$ f nimmt sup an,

$$f(x_0, y_0) = c := \sup_{(x,y) \in K} f(x,y)$$

Finde c und alle solchen $(x_0, y_0) \in K$.

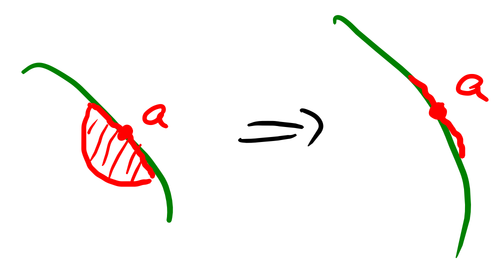
- nicht-diffbare Pkte: $\nexists$
- innere Pkt $\nabla f = (-2x, 2y)$

$$0 = \nabla f(x_0, y_0) \Rightarrow x_0 = 0,\ y_0 = 0$$

$$\operatorname{Hess} f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ indefinit}$$

$$\Rightarrow \text{ kein lok. Extr. in } B_1(0).$$

- Rand: Ist $a \in M$ lok Max von f, dann auch von $f|_M$



Nebenbed $h = 0$

$$h(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

$\nabla h = (2x, 2y) \neq 0$ auf M. Also (Satz 6.11)

$$\left.\begin{aligned} -2x &= \lambda\, 2x \\ 2y &= \lambda\, 2y \end{aligned}\right\} \text{ Lagr.-Bed.}$$

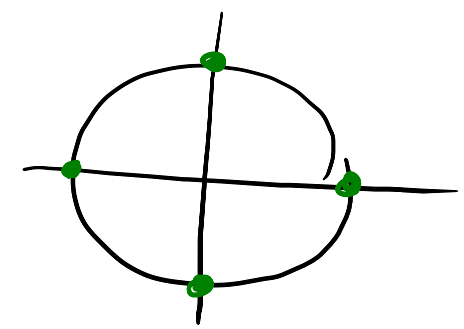
$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{Nebenbed.}$$

Lsg: Wenn $x \neq 0$, dann $\lambda = -1$, $y = 0$, $x = \pm 1$,

Wenn $x = 0$, dann $y = \pm 1$, $\lambda = 1$.

4 Lsgn $(x, y, \lambda) = \{ (1, 0, -1), (-1, 0, -1), (0, 1, 1), (0, -1, 1) \}$

$\Rightarrow$ lok. Extr. mögl. nur bei ("einzige Kandidaten sind")
$a \in \{ (1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1) \}$

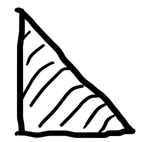


$f(\pm 1, 0) = -1$

$f(0, \pm 1) = 1$

Also $c = 1$, wird angenommen genau bei $(0,1)$ und $(0,-1)$.

Bsp

$K =$  $= \{ (x,y) \in [0,1]^2 \mid x+y \leq 1 \}$

$\partial K = Str_1 \cup Str_2 \cup Str_3$

Max von $f|_{\partial K}$ kann im Innern einer Strecke liegen oder in einem Eckpunkt.

Innern der Strecken: Vorgehen 1: maximiere

$$f(0,y)$$
$$f(x,0)$$
$$f(x,1-x)$$

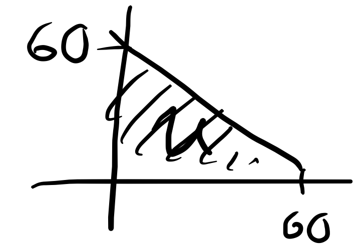
oder Vorgehen 2: Lagr.-Gl.

$$h_1(x,y) = x$$
$$h_2(x,y) = y$$
$$h_3(x,y) = x+y-1$$

Ecken: berechne $f(0,0)$, $f(0,1)$, $f(1,0)$
vgl. mit anderen Kandidaten.

Bsp Finde $a, b, c \geq 0$ mit $a+b+c = 60$
so, dass $a^2 + b^2 + c^2$ max. ist.

Vorgehen A: $c = 60 - a - b$

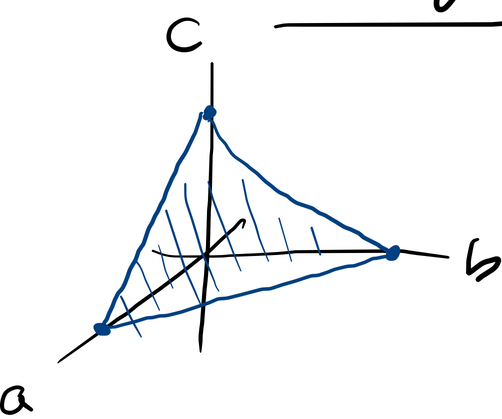


$$f(a,b) = a^2 + b^2 + (60-a-b)^2$$

auf $U = \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq a,\ 0 \leq b,\ a+b \leq 60 \}$

Untersuche $\mathring{U}$, ∂U

Vorgehen B: Lagrange-Methode in $\mathbb{R}^3$



$$f(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2$$

$$h(a,b,c) = a+b+c-60$$

$$M = \{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq a, b, c,\ h(a,b,c) = 0 \}$$

$$= \text{konvexe Hülle} \left\{ \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} \right\}$$

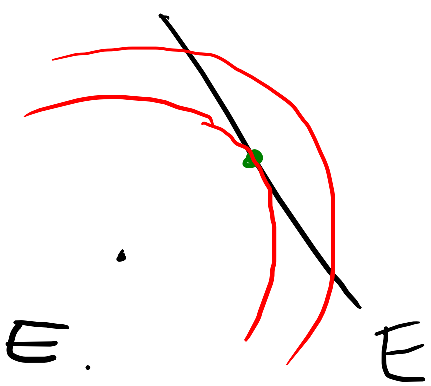
$$= E \cap [0, \infty)^3, \qquad E = \{ h = 0 \} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \nabla h$$

$$\nabla f(a,b,c) = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix}, \quad \nabla h(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lagr.-Bed. $\left(\exists \lambda\ \nabla f = \lambda \nabla h\right) \iff \left(\exists \lambda \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}\right)$

$$\iff a = b = c \overset{\text{Nebenbd.}}{\iff} \underline{a = 20 = b = c}$$

ist lok. Min.



Also kein lok. Max.
im Inneren von M bzgl. E.

Untersuche Rand von M in E $(\neq \partial M \text{ in } \mathbb{R}^3)$
$= 3$ Strecken

Bem 6.14 Vorgehen, als ob man $f - \lambda h$ optimierte: $\nabla(f - \lambda h) = 0$

λ ergibt sich aus $\begin{cases} \nabla(f - \lambda h) = 0 \\ h = 0 \end{cases}$

Bsp 6.15

Satz Jede symm. reelle Matrix A hat mind. einen reellen Eigenwert.

Bew $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x, Ax \rangle$

$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h(x) = \langle x, x \rangle - 1$.

$M = \{h = 0\} = \partial B_1(0) = S^{n-1}$ Einheitssphäre

M komp., f st. $\Rightarrow$ nimmt Max an, etwa bei $x_0 \in M$

$\Rightarrow$ $2Ax_0 = \nabla f(x_0) = \lambda \nabla h(x_0) = \lambda 2 x_0$

$\Rightarrow$ $Ax_0 = \lambda x_0$, x_0 ist EV zum EW $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Bem 6.16 Mehrere Nebenbed. $h_1 \dots h_k$

Finde Extr. von $f|_M$ auf $M = \{h_1 = 0\} \cap \{h_2 = 0\} \cap \dots \cap \{h_k = 0\}$.

M = $(n-k)$-dim Fläche in $\mathbb{R}^n$.

Notw. Bed. $\underbrace{\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0}_{\langle v, \nabla f(a) \rangle = 0} \Leftarrow \underbrace{\forall v \text{ tangential an alle } \{h_j = 0\}}_{\langle v, \nabla h_j(a) \rangle = 0 \ \forall j \in \{1 \dots k\}}$

$$\Longleftrightarrow \quad \nabla f(a) \in \operatorname{span}\{\nabla h_1(a), \dots, \nabla h_k(a)\}.$$

~~falls $\{\nabla h_1(a), \dots, \nabla h_k(a)\}$ lin. unabh.~~

$$\Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}^k : \nabla(f + \lambda \cdot h)\Big|_a = 0$$

$h = \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}^k$.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix} = \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_k h_k$$

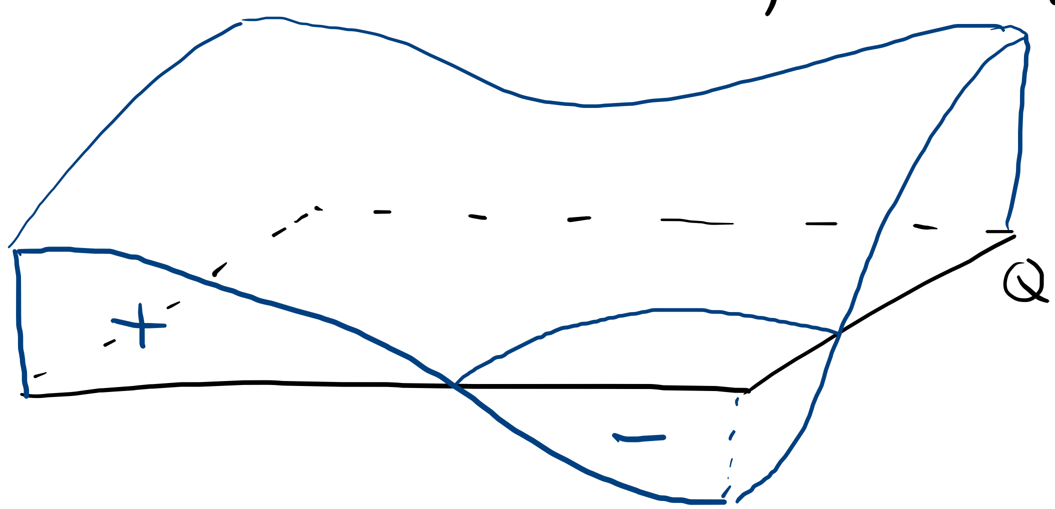
Kap. 7 : auslassen

Kap. 8, 9 : später

Kap. 10 : Integration in $\mathbb{R}^n$

Geom. Bed. des Flächenintegral

$Q := [a,b] \times [c,d]$, $\quad f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ st.



$\int_Q f(x,y)\, dA =$ signiertes Vol. zw. xy-Ebene und Graph(f)