10.16 Transformationssatz für Integrale

= Substitutionsregel im $\mathbb{R}^n$

Seien $U, G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi: U \to G$ Diffeo, $f \in C_0(G)$. Dann $f \circ \Phi \in C_0(U)$ und

$$\int_G d^n \underline{y}\, f(\underline{y}) = \int_U d^n \underline{x}\, f(\Phi(\underline{x}))\, \left|\det D\Phi|_{\underline{x}}\right| .$$

Spezialfall: Φ linear, $\Phi(\underline{x}) = A\underline{x}$, $A \in GL(n, \mathbb{R})$

<u>Prop. 10.15</u> $f \circ A \in C_0(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n \underline{y}\, f(\underline{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n \underline{x}\, f(A\underline{x})\, |\det A|$$

Beweis $n=2$

Sei zunächst $A = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix} = R$ obere Dreiecksmatrix

$$\int_{\mathbb{R}^2} d(x_1,x_2)\, f\circ R = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, f(r_{11}x_1 + r_{12}x_2,\ r_{22}x_2)$$

Translations-Inv. $x_1 \longrightarrow x_1 - \frac{r_{12}x_2}{r_{11}}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, f(r_{11}x_1,\ r_{22}x_2)$$

$\frac{dy_1}{dx_1} = r_{11}$

$\Rightarrow \cancel{dx}\ \frac{dy_1}{r_{11}} = dx_1$

Subst. $y_1 = r_{11}x_1$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \frac{1}{|r_{11}|}\int_{-\infty}^{\infty} dy_1\, f(y_1, r_{22}x_2)$$

Subst. $y_2 = r_{22}x_2$

$$= \frac{1}{|r_{22}|}\int_{-\infty}^{\infty} dy_2 \frac{1}{|r_{11}|}\int_{-\infty}^{\infty} dy_1\, f(y_1,y_2)$$

$$= \frac{1}{|\underbrace{r_{11} \cdot r_{22}}_{\det A}|} \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \; f(y_1, y_2)$$

$$= \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^2} d(y_1, y_2) \; f(y_1, y_2) \, .$$

Ebenso für $A = L$ untere Dreiecksmatrix.

Allg. A lässt sich als $A = LR$ schreiben (L = unt. Dr., R = ob. Dr.) (Gauß-Alg.)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad LR, \quad R = ZSF(A),$$

Also
$$\int_{\mathbb{R}^2} f \circ L \circ R = \frac{1}{|\det R|} \int_{\mathbb{R}^2} f \circ L = \frac{1}{\underbrace{|\det R| \, |\det L|}_{= |\det A|}} \int_{\mathbb{R}^2} f \qquad \square$$

Bsp $A \in O(n)$ Rotationen / Spiegelungen

orthogonale Matrizen $A^T A = E$

$\Rightarrow \det A = \pm 1.$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} d^n\underline{y}\, f(\underline{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n\underline{x}\, f(A\underline{x}) \quad \text{invariant.}$$

Bem 10.17 $n = 1$

Substitutionsregel:

$$\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} dy\, f(y) = \int_a^b dx\, f(\Phi(x))\, \Phi'(x)$$

$$\int_{[\Phi(b),\Phi(a)]} \qquad |\Phi'(x)|$$

falls stets $\Phi'(x) > 0$

stets $\Phi'(x) < 0$, dann $\Phi(b) < \Phi(a)$, also

$$\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} = -\int_{\Phi(b)}^{\Phi(a)} = -\int_{[\Phi(b),\Phi(a)]}$$

allg. $\Phi'(x)$ wechselndes Vorzeichen.

Bem 10.18 Transf. formel gilt nicht nur für $f \in C_0(G)$, sondern schon, wenn $\int_G |f| < \infty$, allg. Version in der Theorie des ~~Lesgue~~ Lebesgue-Integrals.

Kurvenintegrale (nochmal)

Invarianz unter Reparametrisierung

Erinnerung: **Def** Für $\underline{\gamma} \in C^1([a,b], G)$, $G \subset \mathbb{R}^n$

$\underline{f} \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$ heißt

$$\int_{\underline{\gamma}} \underline{f} \cdot d\underline{x} := \int_a^b dt \, \langle \underline{f}(\underline{\gamma}(t)), \dot{\underline{\gamma}}(t) \rangle \in \mathbb{R}$$

das Kurvenintegral von $\underline{f}$ entlang $\underline{\gamma}$.

<u>Spur</u> $\operatorname{Spur}(\underline{\gamma}) = \operatorname{Sp}(\underline{\gamma}) = \underline{\gamma}([a,b])$

$= \text{Bild } \underline{\gamma} =$ unparam. Kurve

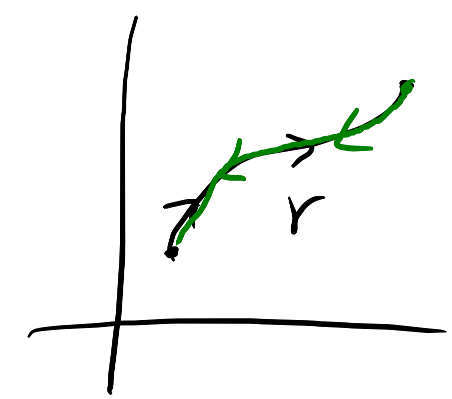
<u>Reparametrisierung</u>

$\underline{\tilde{\gamma}} = \underline{\gamma} \circ \phi, \quad \phi : [c,d] \to [a,b]$ Diffeo

$\underline{\tilde{\gamma}} \circ \phi^{-1} = \underline{\gamma}, \quad \underline{\tilde{\gamma}} : [c,d] \to G, \ C^1, \ \operatorname{Sp} \underline{\tilde{\gamma}} = \operatorname{Sp} \underline{\gamma}$

<u>Prop 10.21</u> Entweder stets $\underbrace{\phi' > 0}_{\text{"sign}(\phi') = +1\text{"}}$ oder $\underbrace{\phi' < 0}_{\text{"sign}(\phi') = -1\text{"}}$

geänderter Durchlaufsinn



und $\forall \underline{f} \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\underline{\tilde{\gamma}}} \underline{f} \cdot d\underline{x} = \operatorname{sign}(\phi') \int_{\underline{\gamma}} \underline{f} \cdot d\underline{x}$$

Bew

$$\int_{\underline{\tilde{\gamma}}} \underline{f} \cdot d\underline{x} = \int_c^d dt \, \langle \underline{f}(\underline{\tilde{\gamma}}(t)), \dot{\underline{\tilde{\gamma}}}(t) \rangle$$

$$= \int_c^d dt \, \langle \underline{f}(\underline{\gamma}(\phi(t))), \dot{\underline{\gamma}}(\phi(t)) \, \phi'(t) \rangle$$

$$\overset{s=\phi(t)}{=} \operatorname{sign}(\phi') \int_a^b ds \, \langle \underline{f}(\underline{\gamma}(s)), \dot{\underline{\gamma}}(s) \rangle \overset{\text{Def}}{=} \operatorname{sign}(\phi') \int_{\underline{\gamma}} \underline{f} \cdot d\underline{x}$$

$\phi' > 0$: $\phi : [c,d] \to [a,b]$
$\phi(c) = a, \ \phi(d) = b$

$\phi' < 0$: $\phi(c) = b, \ \phi(d) = a$

$\square$

Kap. 8: Gewöhnliche Differenzialgleichungen

partielle DGL: z.B. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (PDE) $f(x,t)$

gew. DGL. z.B. $\dfrac{dx}{dt} = 2x(t)$ (ODE) $x(t)$

(eine Lsg. ist $x(t) = \alpha e^{2t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$)

Allg. ODE erster Ordnung:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}\left(\underline{x}(t), t\right) \qquad (1)$$

unbek. $\underline{x} : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ offen, $\underline{x}$ diffbar

ges. $\underline{f} : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen

$\underline{x}$ = Lösung von (1).

Für $t_0 \in I$ als <u>Anfangszeit</u>

heißt $\underline{x}(t_0)$ als <u>Anfangswert</u>.

<u>Def</u> (1) heißt <u>autonom</u> oder <u>zeitunabhängig</u>,

falls f nicht von t abhängt. Dann ist

$$\underline{f}(\underline{x}, t) = \underline{v}(\underline{x}) \quad \text{für ein Vektorfeld}$$

$$\underline{v} : G' \to \mathbb{R}^n, \quad G' \subset \mathbb{R}^n$$

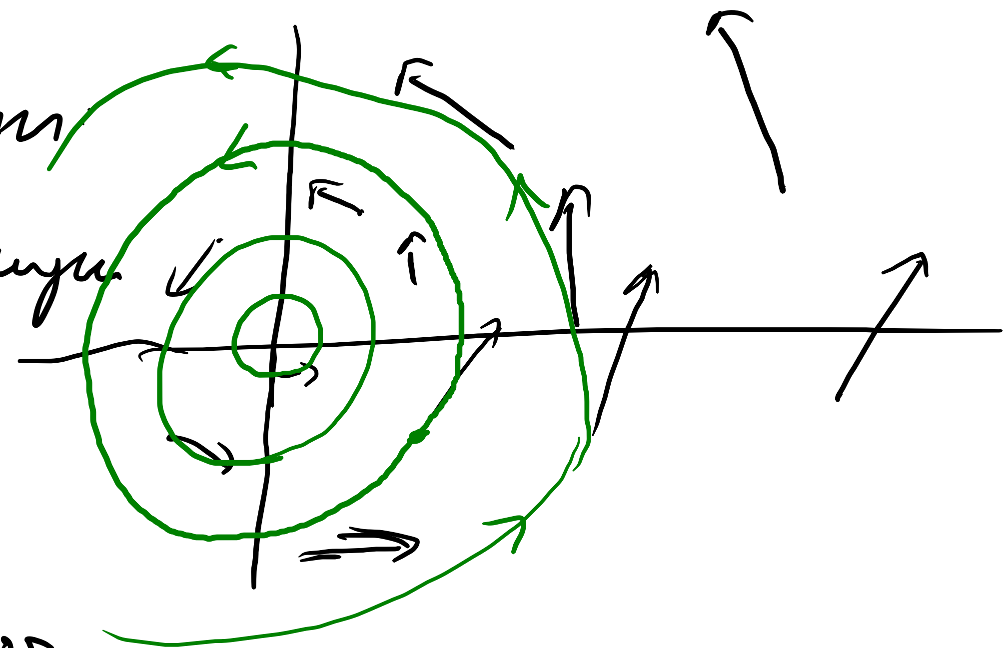
$$G = G' \times \mathbb{R}$$

G' heißt <u>Phasenraum</u> ("Phase" = Zustand)

$\underline{x}$ heißt <u>Integralkurve</u> von $\underline{v}$.

$= $ Lösung von $\dot{\underline{x}} = \underline{v}(\underline{x})$, "folgt dem Vektorfeld", Bsp Phasendiagramm

skizziere $\underline{v}$, einige Lösungen



$$\underline{v}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Lsgn stets tangential an $\underline{v}$

DGl: $\dot{x}_1 = -x_2$

$\dot{x}_2 = x_1$

$$\underline{x}(t) = \big(r\cos(t+\varphi), \; r\sin(t+\varphi) \big), \qquad \underline{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

ist Lsg., denn $\dot{x}_1 = -r\sin(t+\varphi) = -x_2(t)$

$\dot{x}_2 = r\cos(t+\varphi) = x_1(t)$

Anfangszeit $t_0 = 0$

Anfangswert $\underline{x}(0) = (r\cos\varphi, \; r\sin\varphi)$

<u>Bem</u> Manche Relationen zwischen x und $\dot{x}$ gelten nicht als ODE, weil sie sich nicht (eind.) nach $\dot{x}$ auflösen lassen, z. B.

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = x_1^2 + x_2^2$$

<u>Allg. ODE m-ter Ordnung</u>

$$\frac{d^m \underline{x}}{dt^m} = \underline{f}\left(\underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t), \dots, \frac{d^{m-1}\underline{x}}{dt^{m-1}}, t\right) \qquad (2)$$

unbek. $\underline{x} : I \to \mathbb{R}^n$

ges. $\underline{f} : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset (\mathbb{R}^n)^m \times \mathbb{R}$

Anfangswert: $\left(\underline{x}(t_0), \underline{\dot{x}}(t_0), \dots, \frac{d^{m-1}\underline{x}}{dt^{m-1}}(t_0)\right) \in (\mathbb{R}^n)^m$

<u>autonom</u> falls $\underline{f}$ nicht von t abhängt.

Reduktion auf ODE erster Ordnung

Führe weitere Variablen $(\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_{m-1}) \in \overbrace{(\mathbb{R}^n)^{m-1}}^{\cong \mathbb{R}^{n(m-1)}}$

ein mit der Absicht $\underline{y}_1 = \frac{d\underline{x}}{dt}, \ldots, \underline{y}_{m-1} = \frac{d^{m-1}\underline{x}}{dt^{m-1}}$

Betrachte ODE erster Ordnung in $\mathbb{R}^{nm}$

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\underline{x}} &= \underline{y}_1 \\
\dot{\underline{y}}_1 &= \underline{y}_2 \\
&\vdots \\
\dot{\underline{y}}_{m-2} &= \underline{y}_{m-1} \\
\dot{\underline{y}}_{m-1} &= \underline{f}\left(\underline{x}(t), \underline{y}_1(t), \ldots, \underline{y}_{m-1}(t), t\right)
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

d.h. $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{y}_1(t) \\ \vdots \\ \underline{y}_{m-1}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nm}, \quad \frac{d\underline{\gamma}}{dt} = f_1(\underline{\gamma}(t), t) \qquad (4)$

mit $\underline{f}_1(\underline{x}, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_{n-1}, t) = \begin{pmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \vdots \\ \underline{y}_{n-1} \\ \underline{f}(\underline{x}, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_{n-1}, t) \end{pmatrix}$

Dann (4) $\Leftrightarrow$ (2).

<u>Fazit</u>: Sätze über alle ODEs erster Ordnung decken <u>alle</u> ODEs ab.