Gew. D.Gl.en = ODEs

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}\left(\underline{x}(t), t\right) \qquad (1)$$

Was heißt "lösen" einer ODE?

- Finde Formel für $\underline{x}(t)$.
- Oft $\exists\, \underline{x}(t)$ Lsg, die sich nicht durch Formel ausdrücken lässt.

→ Darstellung von $\underline{x}(t)$ als

Potenzreihe
Integral
implizite Fkt

→ approximativ

→ numerische Lsg.

- Existiert zu jedem $\underline{x}_0$ eine eind. Lsg $\underline{x}(t)$ von $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$ mit $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$?

- Eigenschaften von $\underline{x}(t)$?
  - Symmetrien?
  - periodisch ?
  - beschr. ?
    ("Stabilität")
  - $\exists \lim_{t \to \infty} \underline{x}(t)$?
  - oder asymptotisches Verhalten für $t \to \infty$?

Methode der Separation der Variablen

$n = 1$, $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$

Heuristisch: autonome ODE $\dot{x} = f(x)$

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \implies \frac{dx}{f(x)} = dt$$

(daher der Name)

$$\implies \underbrace{\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \frac{dx}{f(x)}}_{=: G(x(t_1))} = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0$$

bek.

Löse die Gl. $G(x(t_1)) = t_1 - t_0$ nach $x(t_1)$ auf.

Auch für nicht-autonome ODE

$$\dot{x} = a(t)\,b(x) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = a(t)\,b(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \frac{dx}{b(x)}}_{=:\,G(x(t_1))} = \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} a(t)\,dt}_{\text{bek.}}\,, \quad \text{wieder } G(x(t_1)) = A(t_1)$$

$$\Rightarrow x(t_1) = G^{-1}(A(t_1)).$$

bek.

Rigoros:

<u>Prop. 8.9:</u> Seien $D \subset \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle,

$a : I \to \mathbb{R}$, $b : D \to \mathbb{R}$ st., $f(x,t) = a(t)\,b(x)$.

$(x_0, t_0) \in D \times I$ mit $f(x_0,t_0) \neq 0$.

Dann $\exists$ Umg. $U_1 \subset I$ von t_0 $\exists$ Umg $U_2 \subset D$ von x_0:

die Gl. $F(x,t) := \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt' - \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{b(x')} \overset{!}{=} 0$

hat eind. C^1 - Lsg. $x: \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$,

und x ist Lsg der ODE $\dot{x} = f(x,t)$

zum AW x_0 zur AZ t_0.

<u>Bew</u> Vor $\Rightarrow$ $b(x_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ $b(x) \neq 0$ in einer Umg von x_0

$\Rightarrow$ F ist definiert in Umg. von (x_0, t_0) und C^1.

und $F(x_0, t_0) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, t_0) = \frac{1}{b(x_0)} \neq 0.$$

$$\overset{\text{SIF}}{\Longrightarrow} \exists\, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \; x(t): \quad F(x(t), t) = 0 \quad \forall t \in \mathcal{U}_1$$

und $\dot{x}(t) = -\partial_x F\Big|_{(x(t),t)}^{-1} \partial_t F\Big|_{(x(t),t)} = b(x(t))\, a(t)$

$= f(x(t), t)$.

$\square$

Reduktion auf autonome ODE

(1) $\quad \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, t)$

Führe weitere Var. $s \in \mathbb{R}$, $\gamma = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$

und gl. $\begin{cases} \dot{s} = 1 \\ \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, s) \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \quad \dot{\gamma}(t) = \underline{f}_0(\gamma(t)) \quad (2)$ mit $\underline{f}_0(\underline{x}, s) = \begin{pmatrix} \underline{f}(\underline{x}, s) \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\underline{f}_0 : G \to \mathbb{R}^{n+1}$$

Dann ist für jede Lsg $\underline{x}(t)$ von (1) zum AW $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$

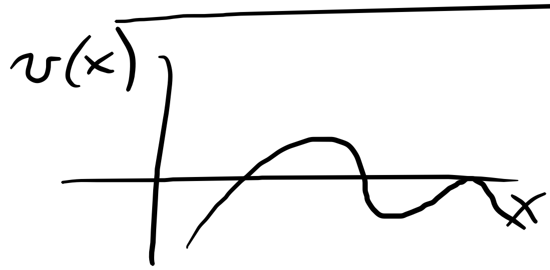
$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \underline{x}(t) \\ t \end{pmatrix}$ eine Lsg von $\dot{\gamma} = \underline{f}_0(\gamma)$ zum AW $\gamma(t_0) = \begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$

und umgekehrt.

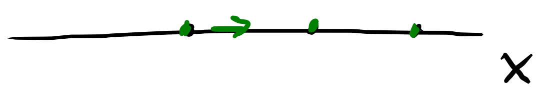
<u>Fazit</u> Sätze über alle autonomen ODEs decken <u>alle</u> ODEs ab.

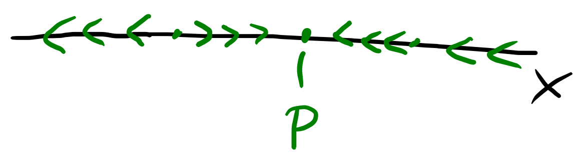
Bem 8.11 Phasendiagramm

$n=1$



$\dot{x} = v(x)$



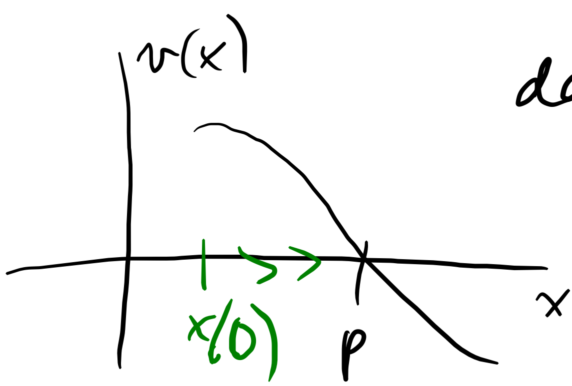


Wenn $\underline{v}(\underline{x}_0) = 0$,
dann ist $\underline{x}(t) = \underline{x}_0 = \text{const.}$
eine Lsg von $\dot{\underline{x}} = \underline{v}(\underline{x})$.

Def x_0 heißt stationärer Punkt oder Gleichgewichtslage.

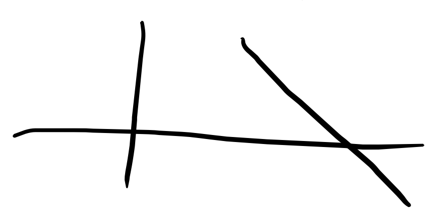
Frage: Braucht $\underline{x}(t)$ endl. oder unendl. lang, um p mit $v(p)=0$ zu erreichen?

Heuristisch: Wenn $v(p)=0$ und $v'(p)$ $\cancel{\neq 0}$ < 0



dann (Taylor) $v(x) \simeq \underbrace{v(p)}_{0} + v'(p)(x-p) + o(x-p)$ für $x \to p$

also $v(x) \approx v'(p)(x-p)$



Angen. $\dot{x} = c\,(x-p)$, $c<0$, z. B. $p=0$.

$$\dot{x} = cx$$

Sep. Var.

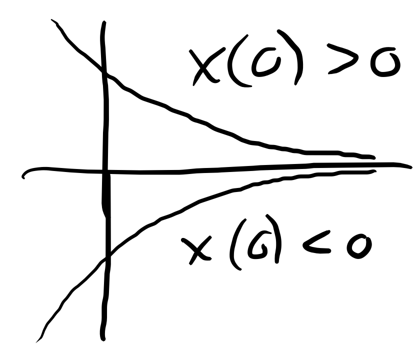
$$\Longrightarrow \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx'}{cx'} = \int_0^t dt' = t$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{1}{c}\Big(\ln x(t) - \ln x(0)\Big)$$

$$\Longrightarrow \quad ct + \ln x(0) = \ln x(t)$$

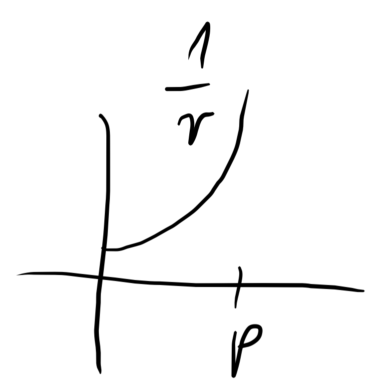
$$\Rightarrow \quad x(0)\, e^{ct} = x(t), \qquad c<0$$

Antwort: ∞ lange bis p.

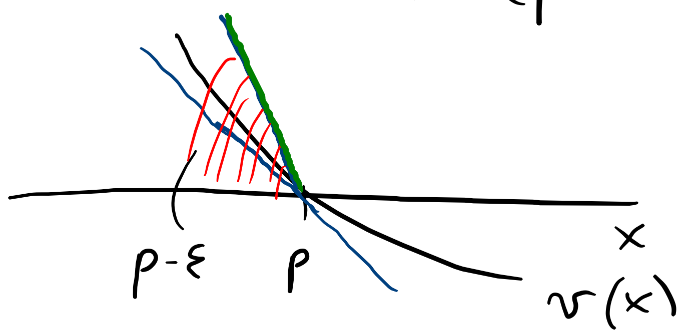


Exakt: Zeit T bis p:

$$T = \int_{x(0)}^{p} \frac{dx'}{v(x')}$$



Vor: $v'(p) < 0$



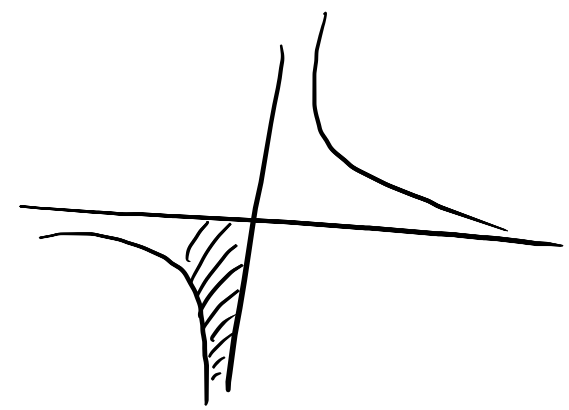
für $p-\varepsilon < x < p$

$$\boxed{0 \le v(x) \le c\,(x-p)}$$

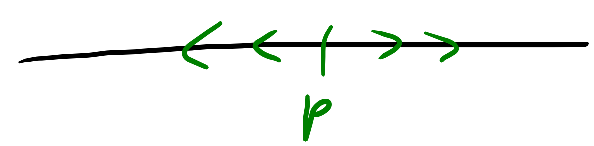
$c = 2v'(p)$

$$\Rightarrow T = \int_{x(0)}^{p} \frac{dx'}{v(x')} \geq \int_{x(0)}^{p} \frac{dx'}{c\,(x-p)}$$

$$\overset{u=x-p}{=} \frac{1}{c} \int_{-\varepsilon}^{0} \frac{du}{u} = \infty$$



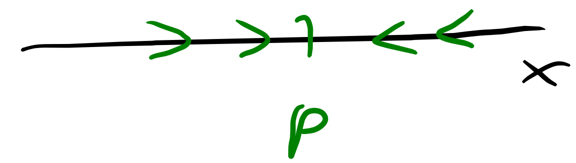
Def Für die ODE $\dot{x} = v(x)$ $(n=1)$ heißt ein stat. Pkt p <u>instabil</u>, falls $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (p-\varepsilon, p) : v(x) < 0$ und $\forall x \in (p, p+\varepsilon) : v(x) > 0$



stabil, wenn $\exists \varepsilon > 0$

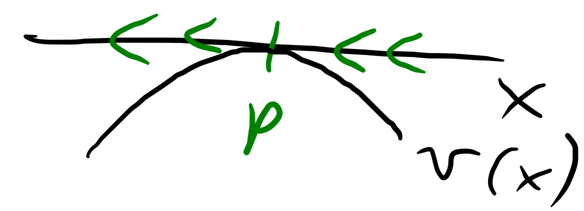
$\forall x \in (p-\varepsilon, p): v(x) > 0$

und $\forall x \in (p, p+\varepsilon): v(x) < 0$



halbstabil wenn

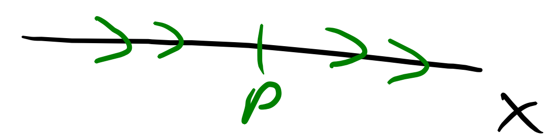
wie im Bild.



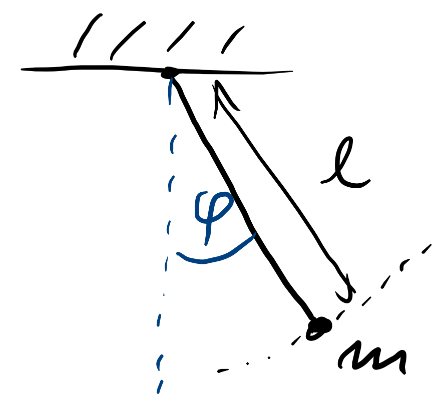
$v > 0$ auf $(p-\varepsilon, p+\varepsilon) \setminus \{p\}$

oder

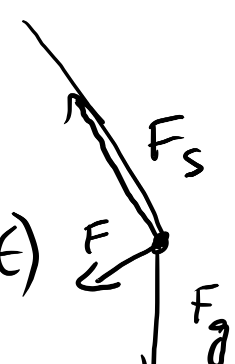
$v < 0$ auf $(p-\varepsilon, p+\varepsilon) \setminus \{p\}$.



n = 2 **Bsp**: ebenes Pendel



"$ma = F$"



(1) $\cancel{m}\, l \ddot{\varphi}(t) = -\cancel{m}\, g \sin \varphi(t)$

ein "anharmonischer Oszillator"

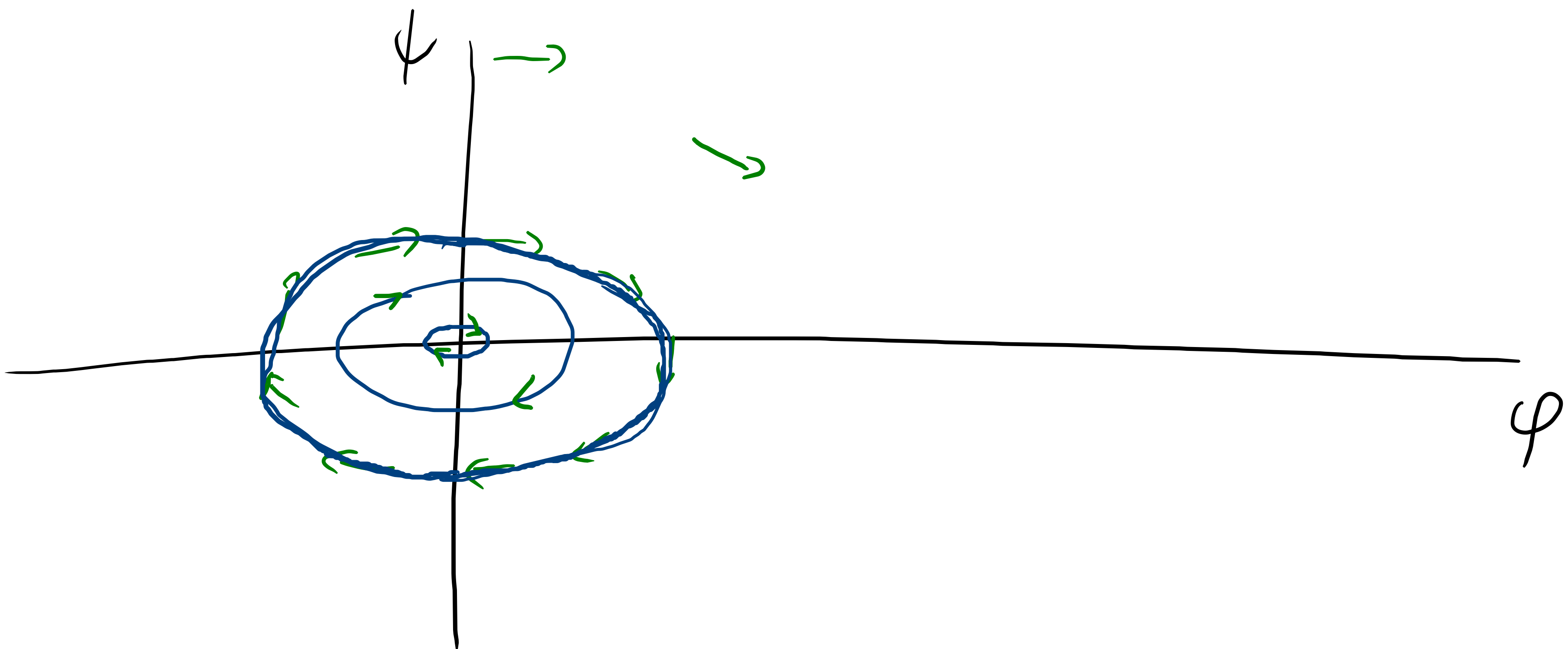
[Approx. für kleine φ: $\sin\varphi \approx \varphi$. $\rightsquigarrow \ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi$ harm. Osz.]

Red. auf 1. Ord.: $\psi(t) = \dot\varphi(t)$

$$\begin{cases} \dot\varphi = \psi \\ \dot\psi = -\frac{g}{l}\sin\varphi \end{cases}$$

$v(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} \psi \\ -\frac{g}{l}\sin\varphi \end{pmatrix}$

Phasendiagramm:



$x(\cdot)$ oder $x(\mathbb{R})$ heißt auch Trajektorie oder Bahn im Phasenraum.