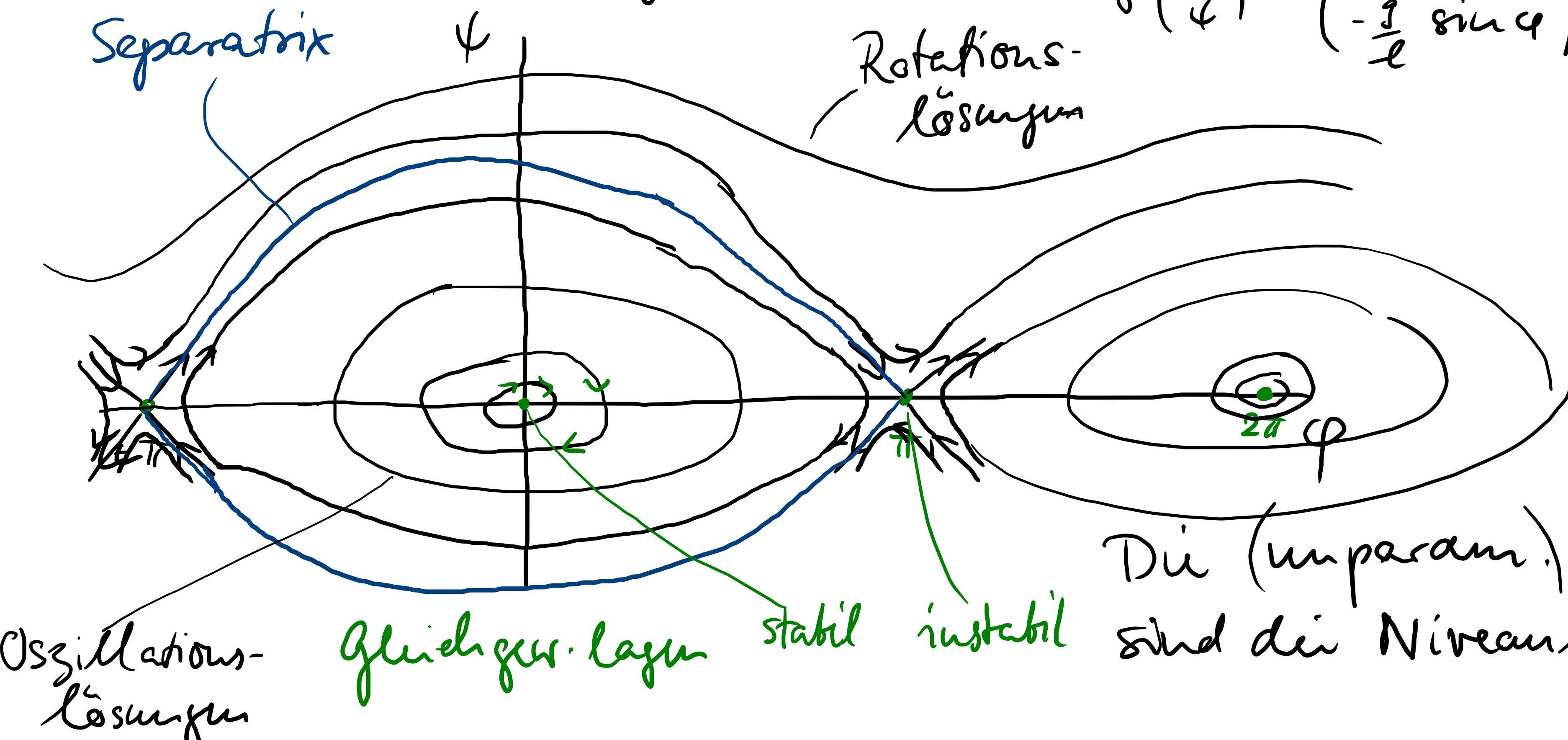
Bsp ebenes Pendel

$$\dot\varphi = \psi$$

$$\dot\psi = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi$$

$$v\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi\\ -\frac{g}{\ell}\sin\varphi\end{pmatrix}$$

Phasendiagramm



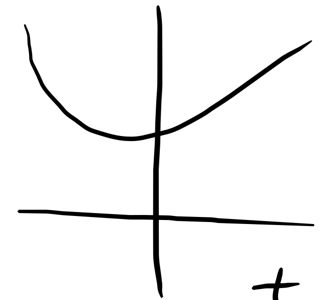
Die (unparam.) Trajektorien sind die Niveaulinien der Energie

$$E(\psi,\varphi) = \frac{m}{2}\ell^2\psi^2 - mg\ell\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \psi = \pm\sqrt{\frac{2}{m\ell^2}E + \frac{2g}{\ell}\cos\varphi}$$

Existenz und Eindeutigkeit der Lsgen

8.12 b) **Bsp** $\quad v(x) = 1 + x^2$

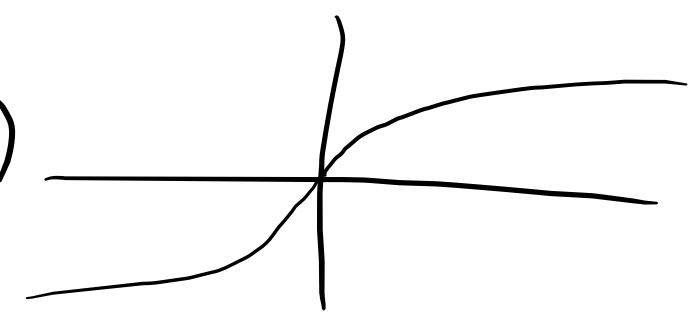


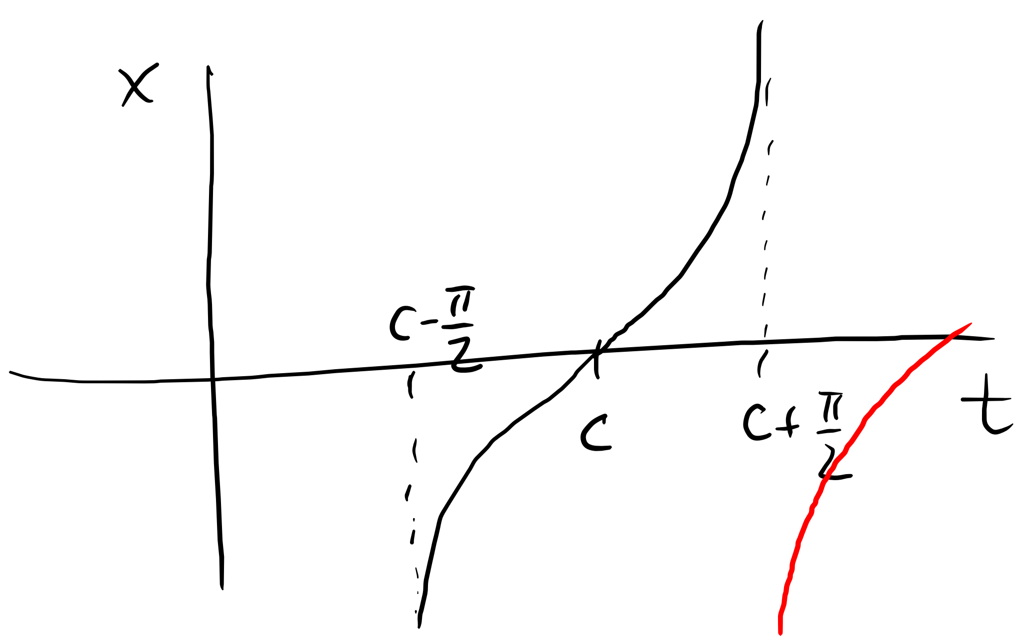
$\nexists$ stat. Pkte

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{1+x^2}}_{\arctan x(t) \, - \, \underbrace{\arctan x(0)}_{-c}} = \int_0^t dt' = t$$

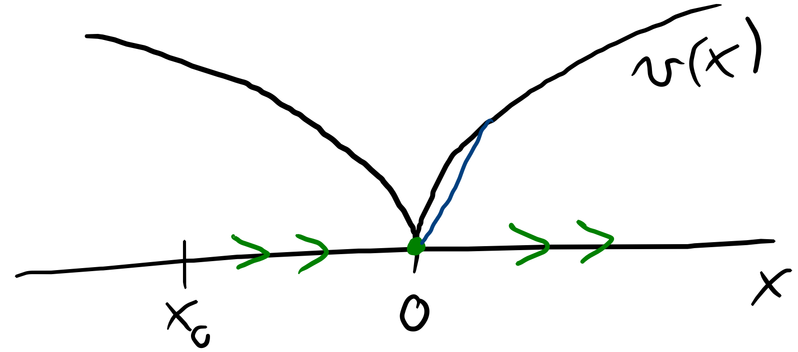
$$\Rightarrow \quad \arctan x(t) = t - c$$

$$\Leftrightarrow \quad x(t) = \tan(t - c)$$



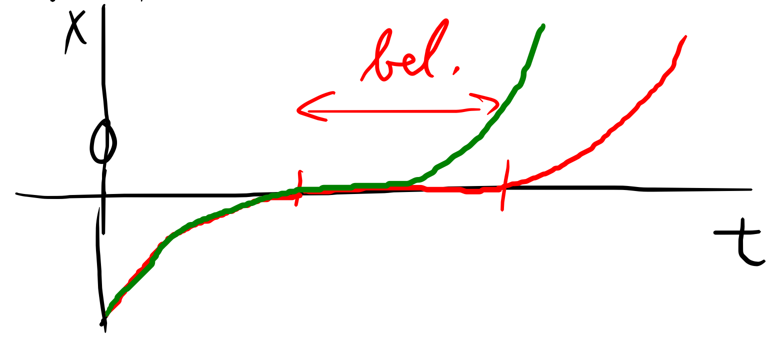


8.12 c) <u>Bsp</u> $v(x) = \sqrt{|x|}$



ÜA $\qquad \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{|x|}$

Lösungen:



nicht eindeutig

<u>Def 8.13</u> Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $v : G \to \mathbb{R}^n$

a) Erinnerung: v heißt <u>Lipschitz-stetig</u> $\Longleftrightarrow$ $\exists L \geq 0$

$$\forall x, y \in G : \|v(x) - v(y)\| \leq L \|x - y\|.$$

b) v heißt <u>lokal Lipschitz-stetig</u>, wenn $\forall x \in G$

$\exists$ Umg $U \subset G$ von x: $\quad v|_U$ ist Lipschitz-stetig.

<u>Bsp</u> $v(x) = x^2$, $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nicht Lipschitz-st.

aber lok. Lip., $\quad v(x) = \sqrt{|x|}$ nicht lok. Lipschitz.

Fakten über "lok. Lip."

Bem 8.14 $\quad v \in C^1(G, \mathbb{R}^n) \Longrightarrow v$ lok. Lip.

Bew Sei $x \in G$, $\varepsilon > 0$ so, dass $U := \overline{B_\varepsilon(x)} \subset G$

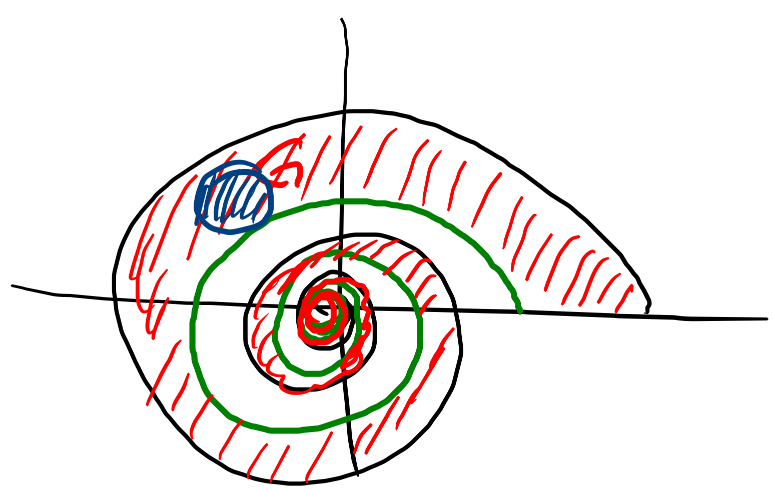
Dv st., U komp. $\Rightarrow \exists \max_{y \in U} \| Dv|_y \| =: M < \infty$

U konvex $\Rightarrow \quad \gamma(t) = tx + (1-t)y \in U \quad \forall y \in U$.

Schrankensatz (4.46) $\Longrightarrow \quad \| v(x) - v(y) \|$

$$\leq \int_\gamma \|Dv\| \leq M \, \|x-y\|. \qquad \square$$

Bsp



$r = e^{-\varphi}$

$r = \frac{1}{2} e^{-\varphi}$

G

<u>Prop 8.15</u> Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet (offen und zus. hgd.)

$v : G \to \mathbb{R}^n$ lok. Lip.

Für jedes Kompaktum $K \subset G$ ist $v|_K$ Lipschitz.

<u>Bew</u> Wäre $v|_K$ nicht Lip., dann $\exists (x_n), (y_n)$ in K:

$$\| v(x_n) - v(y_n) \| \geq n \; \| x_n - y_n \|$$

Bolzano-Weierstraß $\Rightarrow \exists$ TF $x_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} x \in K$

$$y_{n_{k_\ell}} \xrightarrow{\ell \to \infty} y \in K, \quad x_{n_{k_\ell}} \xrightarrow{\ell \to \infty} x \in K$$

$$\| x_{n_{k_\ell}} - y_{n_{k_\ell}} \| \leq \frac{1}{n_{k_\ell}} \| v(x_{n_{k_\ell}}) - v(y_{n_{k_\ell}}) \|$$

v lok Lip $\Rightarrow$ v st. $\Rightarrow$ $v(K)$ komp.

$\Rightarrow \| v(x_n) - v(y_n) \|$ beschr. $\Rightarrow$ $y = x$.

Sei U Umg von x mit $v|_U$ Lip.

$\Rightarrow$ ab n_0 liegen alle x_n, y_n in U $\lightning$

$\square$

8.16 Satz von Picard-Lindelöf (1890)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $v : G \to \mathbb{R}^n$ lok. Lip., $x_0 \in G$.

<u>Existenz</u> $\exists \delta > 0 \ \exists x \in C^1\big((-\delta, \delta), G\big)$:

$$\dot{x} = v(x) \quad \text{und} \quad x(0) = x_0 \qquad \text{(AWP)}$$

<u>Eindeutigkeit</u>: Ist $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $0 \in I$,

$\tilde{x} : I \to G$ diffbar, Lsg des (AWP),

dann $\tilde{x}(t) = x(t) \quad \forall t \in (-\delta, \delta) \cap I$

Bew

Idee: (AWP) $\overset{\text{Int.}}{\Longleftrightarrow}$ $\underset{}{x(t) - \overset{x_0}{\overset{\downarrow}{x(0)}}} = \int_0^t \dot{x}(t')\,dt'$

$\dot{x} = v(x)$

$$= \int_0^t v(x(t'))\,dt'$$

also (AWP) $\Longleftrightarrow$ $x(t) = x_0 + \int_0^t v(x(t'))\,dt'$

d.h. x ist Fixpunkt von $\Phi : \varphi \longmapsto \Phi[\varphi]$

$$\Phi[\varphi](t) = x_0 + \int_0^t v(\varphi(t'))\,dt'$$

Brauchen: einen Banachraum stetiger Fktnen φ auf dem Φ eine Kontraktion ist

BFPS $\Longrightarrow$ Beh. (φ Fixpkt und st. $\overset{\text{HS}}{\Longrightarrow}$ φ st. difflbar, $\dot{\varphi} = v(\varphi)$.

Also: $\circ$ $\exists r > 0 : K := \overline{B_r(x_0)} \subset G$.

$\circ$ K komp., $v|_K$ st.

$\Rightarrow \exists M > 0 : \forall x \in K : \|v(x)\| \leq M$

und $v|_K$ Lip. mit Konst. L.

$\circ$ setze $\delta := \min\left\{ \frac{1}{L}, \frac{r}{M} \right\}$, $0 < \delta_0 < \delta$ bel.

$\circ$ setze $X := \{ \varphi : [-\delta_0, \delta_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid \varphi \text{ st.} \}$

$$= C\left([-\delta_0, \delta_0], \mathbb{R}^n \right)$$

mit Norm $\|\varphi\|_\infty := \sup_{t \in [-\delta_0, \delta_0]} \|\varphi(t)\|$

$\circ$ $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ist Banachraum

$\circ$ $A := \{ \varphi \in X \mid \varphi(0) = x_0, \varphi([-\delta_0, \delta_0]) \subset K \}$

ist abg. Teilmenge

∘ Dann $\Phi[\varphi] \in A$, denn

$\longrightarrow$ $\Phi[\varphi]$ ist st., also $\Phi[\varphi] \in X$

$\longrightarrow$ $\Phi[\varphi](t=0) = x_0$

$\longrightarrow$ $\Phi[\varphi](t) \in K \quad \forall t \in [-\delta_0, \delta_0]$, weil

$$\| \Phi[\varphi](t) - x_0 \|_{\mathbb{R}^n} = \left\| \int_0^t v(\varphi(t'))\, dt' \right\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq \int_0^t \underbrace{\| v(\underbrace{\varphi(t')}_{\in K}) \|_{\mathbb{R}^n}}_{\leq M} dt' \leq \delta_0 M < \frac{r}{M} M = r.$$

∘ Also $\Phi : A \to A$

∘ Kontraktion mit Konst. $\vartheta := \delta_0 L < 1$, denn

$$\| \Phi[\varphi] - \Phi[\psi] \|_\infty = \sup_{|t| \leq \delta_0} \left\| \int_0^t \left(v(\varphi(t')) - v(\psi(t')) \right) dt' \right\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq \sup_{|t| \leq \delta_0} \int_{\cancel{0}\ \min(0,t)}^{\cancel{t}\ \max(0,t)} dt' \, \| v(\varphi(t')) - v(\psi(t')) \|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq \sup_{|t|\leq\delta_0} \int_{\min(0,t)}^{\max(0,t)} dt' \, L \underbrace{\|\varphi(t')-\psi(t')\|_{\mathbb{R}^n}}_{\leq \|\varphi-\psi\|_\infty}$$

$$\leq \sup_{|t|\leq\delta_0} |t| \, L \, \|\varphi-\psi\|_\infty = \delta_0 L \|\varphi-\psi\|_\infty$$

$$= \vartheta \|\varphi-\psi\|_\infty .$$

- BFPS $\Longrightarrow \exists_1 \varphi : \quad \Phi[\varphi] = \varphi$

$\Longrightarrow$ Existenz.