Wo DGLen auftreten und warum

1) Physik: weil manche Naturgesetze DGLen sind.
(z.B. Newtonsche Bewegungsgl. „$K = mb$“, „$b = \frac{K}{m}$“
Maxwell-Gl.,
Schrödinger-Gl.,)

2) Statistik: z.B. Gesamtzahl Geburten/Tode vorhersagbar, Einzelfall nicht
$\Rightarrow$ Populationsentwicklung approx. deterministisch
(wie ÜA 47 Bl. 11)

ähnlich: viele Individuen, z.B.

- Epidemiologie
- Straßenverkehr: Verkehrsfluß (viele Fahrzeuge)
- Biologie: viele Zellen
- chemische Reaktion (viele Atome/Moleküle)
- Wärmetransport (viele Atome)
- Stromfluß (viele Elektronen)
- Ökonomie: Marktentwicklungen (viele Käufer)

3) Ökonomie: faire Preise, z.B. Verzinsung

4) Anwendungen, z.B. Ingenieurwesen, Klima-Modellen

Ziele des Studiums von Dglen:

1) quantitative Vorhersage (z.B. Klima-Modelle)

2) Studium von Ursachen / Mechanismen / Erklärungen von Phänomenen.
("mathematisches Labor" Modellrechnungen)

3) Auffinden von Naturgesetzen.

Dgl. Bsp.: Stetige Verzinsung

$x(t)$ = Sparguthaben zur Zeit t

r = differentielle Zinssatz

Dgl. $$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx. \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}\right\} \text{(AWP)}$$

Lösungsweg 1: Erraten: $x(t) = x_0 e^{rt}$ ist Lsg.

SPL $\Longrightarrow$ Lsg. eind. $\Longrightarrow$ wir haben alle Lsg.

Lösungsweg 2: Exponential-Ansatz-Methode

für lineare ODEs (v lin. Fkt, hier $v(x) = rx$):

in 1d: setze "Probierfkt" (trial function) $x(t) = e^{\lambda t}$

in ODE ein: $\dot{x} = rx$

$$\lambda \cancel{e^{\lambda t}} = r \cancel{e^{\lambda t}}$$ d.h. e^{rt} ist Lsg.

$\Rightarrow$ $c e^{rt}$ ist Lsg.

AW x_0: $c e^0 = x_0 \Rightarrow c = x_0$.

Lösungsweg 3: Separation der Variablen

$$\left[\ln|x|\right]_{x_0}^{x(T)} = \int_{x_0}^{x(T)} \frac{\frac{dx}{\cancel{dt}}}{x} = \int_0^T r\cancel{x}\, dt = rT$$

setzt voraus, dass $x(T)\, x_0 > 0$.

$$\ln|x(T)| - \ln|x_0| = \ln\left|\frac{x(T)}{x_0}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x(T)}{x_0}\right| = e^{rT}$$

$$\Rightarrow |x(t)| = |x_0|\, e^{rt}$$

$$\Rightarrow x(t) = \cancel{\pm} x_0\, e^{rt}$$

Was, wenn $x_0 = 0$?
Separation der Variablen nicht anwendbar.
(Raten.)

Beim Jahreszinssatz 17%

bedeutet $\underbrace{x(1)}_{x_0 e^{r \cdot 1}} = 1,17 \cdot x_0 \implies e^r = 1,17$

$e^r = 1 + J.$

$\implies r = 0,157 \frac{1}{\text{Jahr}}$ differentieller Zinssatz.

$x(t+dt) = \underbrace{e^{r\,dt}}_{\approx 1 + r\,dt} x(t)$

$0,157 \frac{1}{\text{Jahr}} = \frac{0,157}{A} \frac{1}{\text{sek}}$

A = Anz. Sek. in 1 Jahr
= 31,557,600

Aufgabe: Was sind die stationären Pkte? Stabil?

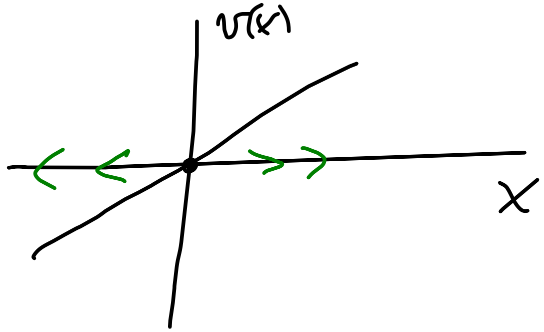
$$\dot{x} = rx$$

Lösung: $v(x) = 0$. Hier $v(x) = rx$

$$\Updownarrow$$

$$x = 0$$

einziger stat. Pkt., instabil



$v'(p)$

Dgl. rückwärts

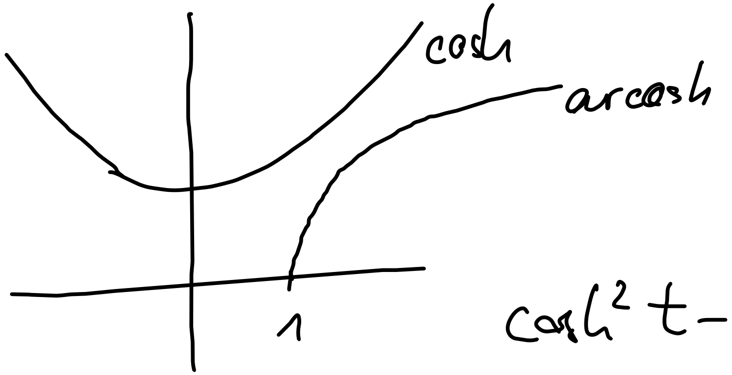
Aufgabe: Finde Dgl-AWP, das als eind. Lsg.

$$x(t) = 2\cosh t \quad \text{hat}$$

$$= e^{t} + e^{-t}.$$

Antwort: $\ddot{x} = x$, $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 0$.

Alternativ-Antwort 1ter Ordnung: $\dot{x} = v(x)$



$$2 \sinh t = v(\cosh t)$$

$$v(x) = 2 \sinh(\operatorname{arcosh} x)$$

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

$$\sinh t = \pm \sqrt{\cosh^2 t - 1}$$

$$\Rightarrow \sinh(\operatorname{arcosh} x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

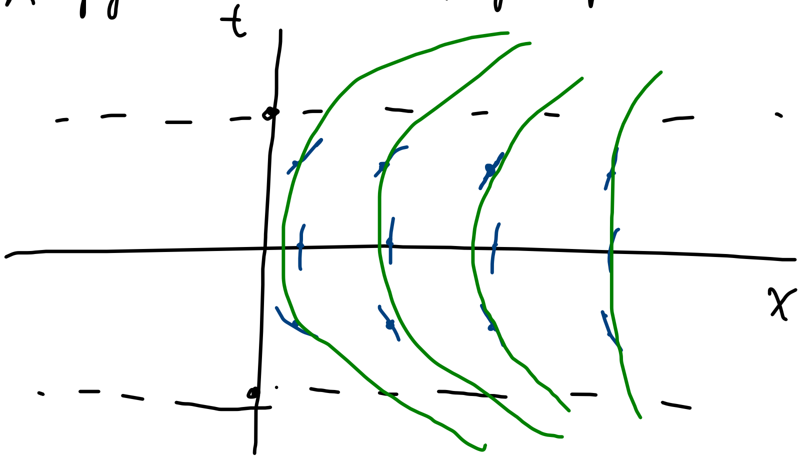
$$\Rightarrow v(x) = 2\sqrt{x^2 - 1} \quad \text{für } x \geq 1 .$$

Symmetrie

$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$, f lok. Lip., $f(-t,x) = -f(t,x)$

$f(0,x) = 0$

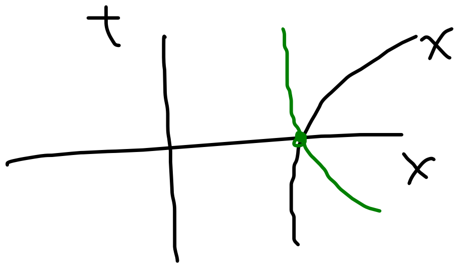
Aufgabe: Was folgt für $x(t)$ Lösungen?



Richtungsfeld

$$x(-t) = x(t)$$
$$\Downarrow$$
$$-\frac{dx}{dt}(-t) = \frac{dx}{dt}(t)$$
$$\Downarrow$$
$$-f(-t, x(-t)) = f(t, x(t))$$
$$\Downarrow$$
$$-f(-t, x(t)) = f(t, x(t))$$

Lösung: $y(t) := x(-t)$



$y(0) = x(0)$

Beh: $\dot{y} = f(t,y)$

Bew: $\dot{y} = -\dot{x}(-t) = -f(-t, x(-t))$
$= f(t, x(-t)) = f(t, y(t))$. $\overset{SPL}{\Longrightarrow} y(t) = x(t)$ □