Satz von Picard-Lindelöf

Beweis (Forts.)

Satz: $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet

$\underline{v}: G \to \mathbb{R}^n$ lok. Lip.

$$(\text{AWP}) \begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{v}(\underline{x}) \\ \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \end{cases}$$

Ex: $\exists\, \underline{x}: (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$ Lsg. von (AWP)

Eind.:

Lsg. ist eind. auf $(-\delta, \delta)$,

d.h. $\tilde{x}: I \to \mathbb{R}^n$ Lsg.

Intervall $(0 \in I)$

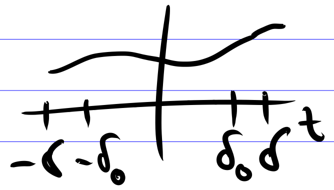
dann $\tilde{x}(t) = x(t) \quad \forall t \in (-\delta, \delta) \cap I$.

Bew: BFPS,

$$\Phi[\varphi](t) = \underline{x}_0 + \int_0^t v(\varphi(t'))\, dt'$$

δ, $\delta_0 < \delta$ bel.

$[-\delta_0, \delta_0]$



$\delta_1 < \delta_2$ $\quad (-\delta, \delta)$

$x_1(t) = x_2(t) \quad \forall |t| \leq \delta_1$

$x(t) = x_2(t)$ hängt nicht von δ_0

$x : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$

Lsg. des (AWP). Also $\Rightarrow$ Ex.

<u>Eind.</u> $\tilde{x} : I \to G$, $0 \in I$

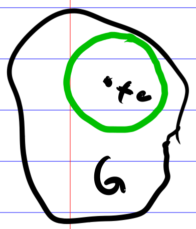
$$\dot{\tilde{x}} = v(\tilde{x}), \quad \tilde{x}(0) = x_0.$$

$$x\big|_{[-\delta_0, \delta_0] \cap I} = \tilde{x}\big|_{[-\delta_0, \delta_0] \cap I}$$

$$\Rightarrow x\big|_{(-\delta, \delta) \cap I} = \tilde{x}\big|_{(-\delta, \delta) \cap I}. \qquad \square$$

Bem 8.17 a) SPL liefert "lokale Existenz" oder "Kurzzeit-Existenz"

b) untere Schranke an die "Lebensdauer" der Lsg.



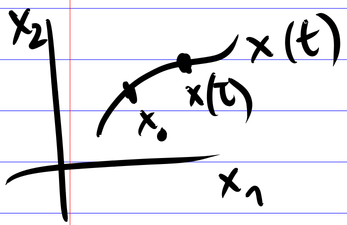
$$\delta(x_0) = \min\left\{ \frac{1}{L(x_0)}, \frac{r(x_0)}{M(x_0)} \right\}$$

$M(x_0) = \sup_{x \in K} \|v(x)\|$, L = Lip.konst. von v auf K

c) Ist $x(\cdot)$ Lsg. zum AW x_0 (AZ 0), dann

$$\tilde{x}(t) := x(t+\tau) \text{ Lsg.}$$

zum AW $x(\tau)$ (AZ 0)



$$\underline{\dot{\tilde{x}}(t)} = \dot{x}(t+\tau) = v(x(t+\tau))$$
$$= \underline{v(\tilde{x}(t))}$$

d) SPL ist auch numerisch nutzbar ("Picard-Iterationen"), besser als das offensichtliche Verfahren:

$$x\big((n+1)\Delta t\big) = x(n\Delta t) + v\big(x(n\Delta t)\big)\,\Delta t$$

Prop 8.19 $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $v : G \to \mathbb{R}^n$
lok. Lip.

$I, \tilde{I}$, $0 \in I$, $0 \in \tilde{I}$ offene Intervalle

$x, \tilde{x}$ Lsgen von (AWP) $\begin{cases} \dot{x} = v(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

$x : I \to G$
$\tilde{x} : \tilde{I} \to G$. Dann

$$x(t) = \tilde{x}(t) \quad \forall t \in I \cap \tilde{I}.$$

Bew Sei $A = \{ t \in I \cap \tilde{I} \mid x(t) = \tilde{x}(t) \}$

z.z. $A = I \cap \tilde{I}$

Sei $I = (t_-, t_+)$, $\tilde{I} = (\tilde{t}_-, \tilde{t}_+)$

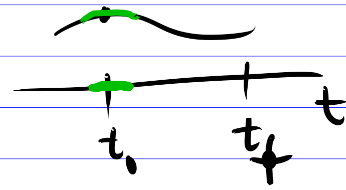
oBdA $t_+ \leq \tilde{t}_+$

$t_0 := \sup \{ \tau \in (0, t_+) \mid \forall t \in [0, \tau] : x(t) = \tilde{x}(t) \}$

z.z. $t_0 = t_+$

SPL $\Rightarrow \exists\, \delta > 0 \;\; \forall t \in [0, \delta) : x(t) = \tilde{x}(t)$

Also $0 < \delta \leq t_0 \leq t_+$



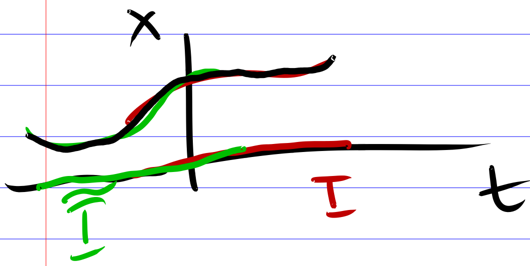
Wäre $t_0 < t_+$:

$x, \tilde{x}$ st. $\Rightarrow x(t_0) = \tilde{x}(t_0) =: \tilde{x}_0$

SPL $\Rightarrow \exists\, \delta_{\tilde{x}_0} > 0 : \forall t \in (t_0 - \delta_{\tilde{x}_0}, t_0 + \delta_{\tilde{x}_0})$

$x(t) = \tilde{x}(t)$ ↯ zur Def von t_0

Also $t_0 = t_+$. Ebenso untere Grenze. $\square$



<u>Def 8.18</u> Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet
$v: G \to \mathbb{R}^n$ ~~stet. diff~~ st.

$I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall
$x: I \to G$ Lsg. von $\dot{x} = v(x)$
heißt eine "<u>maximale Lsg</u>" wenn sie nicht als Lsg fortgesetzt werden kann.

d.h. wenn gilt:

Ist $\tilde{I}$ offenes Intervall,

$\tilde{x} : \tilde{I} \to G$ Lsg von $\dot{x} = v(x)$

und $\tilde{I} \supset I$, und $\tilde{x}|_I = x$,

dann ist $\tilde{I} = I$ und $\tilde{x} = x$.

Satz 8.20 $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet

$v: G \to \mathbb{R}^n$ lok. Lip.

Dann ex. zu jedem $x_0 \in G$ genau eine max. Lsg von $\dot{x} = v(x)$ mit AW x_0.

Bew Sei $I := \{ t \in \mathbb{R} \mid \exists$ ~~offenes~~ Int. $J \subset \mathbb{R}$:

$\exists x : J \to G : 0, t \in J, x(0) = x_0, \dot{x} = v(x) \}$

$I = \bigcup J \Rightarrow I$ ist Int.

SPL $\Rightarrow I$ ist offen.

Setze $x_{max}(t) := x(t) \quad \forall t \in I$

unabh. von $x(\cdot)$ Prop. 8.19

Dann $x_{max}(0) = x_0$ und

$$\dot{x}_{max}(t) = v(x_{max}(t))$$

weil es auf Umg von t mit Lsg x üb.

$\Rightarrow$ x_{max} ist eine max. Lsg.

Prop 8.19 $\Rightarrow$ max. Lsg. ist eind. $\square$

Notation Def. intervall $I(x_0)$ von $x_{max}(\cdot)$

$$I(x_0) = \big(t_-(x_0), t_+(x_0)\big)$$

mit $t_-(x_0) \in [-\infty, 0)$, $t_+(x_0) \in (0, \infty]$

Sei $\Omega := \{(t, x_0) \in \mathbb{R} \times G \mid t \in I(x_0)\}$

und $\varphi(t, x_0) = x_{max}(t)$ mit $x_{max}(0) = x_0$

$\varphi : \Omega \to G$ heißt "<u>Flussabbildung</u>"

$$\varphi_t(x) := \varphi(t, x)$$

$$\varphi_t : \Omega_t \to G, \quad \Omega_t := \{x \in G \mid (t, x) \in \Omega\}$$

φ_t = Zeit-Entwicklung um t.

<u>Bericht</u> Ω offen, $\varphi : \Omega \to G$ st.

$\varphi \in C^1$ falls $v \in C^1$.

Satz 8.22 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ gebiet,

$v: G \to \mathbb{R}^n$ lok. Lip.

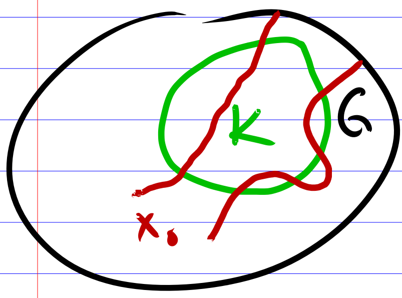
$x: (t_-(x_0), t_+(x_0)) \to G$ die max. Lsg.

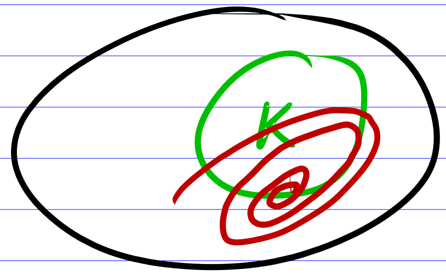
von $\dot{x} = v(x)$ zum AW x_0.

Falls $t_+(x_0) < \infty$, dann gibt es zu jedem Kompaktum $K \subset G$ ein

$0 < \tau_K < t_+(x_0)$ mit $\forall t \in (\tau_K, t_+(x_0))$: $x(t) \notin K$.

G offen





Bew 1) $\exists \rho > 0 \ \forall x \in K: \ B_\rho(x) \subset G$

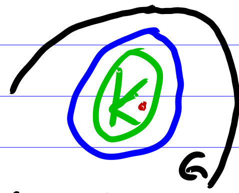
denn entweder $G = \mathbb{R}^n$ oder

$x \mapsto \operatorname{dist}(x, \partial G) = \inf \{ \|x-y\| \mid y \in \partial G \}$

ist st., nimmt auf K min $=: \rho$ an, und $\rho > 0$.

sonst $K \cap \partial G \neq \emptyset$ (also $K \not\subset G$).

2) Seien $\|v(x)\| \le M \quad \forall x \in \overline{B_{\rho/2}(K)}$



$$= \bigcup_{x \in K} \overline{B_{\rho/2}(x)}$$

und L Lip. Konst. für $v\big|_{\overline{B_{\rho/2}}(K)}$

3) $\delta := \min\left\{ \frac{1}{L}, \frac{\rho/2}{M} \right\}$

SPL $\Rightarrow \forall y \in K: \; t_+(y) \geq \delta$.

4) Wenn $x(t) \in K$ und $t \in (0, t_+(x_0))$,

dann $t_+(x_0) = t + t_+(x(t))$

$\geq t + \delta$

5) Also für $t \in (\underbrace{t_+(x_0) - \delta}_{=: \tau_K}, t_+(x_0))$

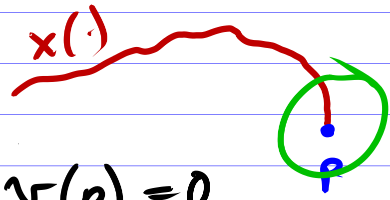
gilt $x(t) \notin K$.

Entspr. $t_- > -\infty$. $\square$

Folgerung 8.23 b)

Bleibt $x(\cdot)$ in einem Kompaktum (insbes. falls $x(t) \xrightarrow{t \to t_+(x_0)} p \in G$) dann $t_+(x_0) = \infty$.

Falls $x(t) \xrightarrow{t \to \infty} p$, dann ist p stationär, $v(p) = 0$.



Bew $\dot{x}(t) = v(x(t)) \xrightarrow{t \to \infty} v(p)$

weil v st.

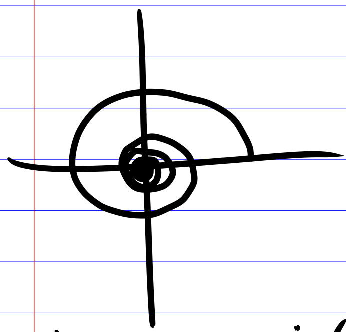
und wenn $v(p) \neq 0$, dann kann $x(t)$ nicht konv.

(Beachte: i. allg. für Kurven

$$y(t) \xrightarrow{t\to\infty} p \not\Rightarrow \dot{y}(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

Bsp $y(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t}\cos(t^2) \\ \frac{1}{t}\sin(t^2) \end{pmatrix} \xrightarrow{t\to\infty} 0$

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^2}\cos(t^2) - \frac{2\cancel{t}}{\cancel{t}}\sin(t^2) \\ \underbrace{-\frac{1}{t^2}\sin(t^2)}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2t}{t}\cos(t^2)}_{\not\to 0} \end{pmatrix}$$



$$\not\to 0$$

Wenn $\dot{x}(t) = v(x(t)) \xrightarrow{t \to \infty} v(p) = v_\infty \neq 0,$

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\dot{x}(t')}_{\in B_\varepsilon(v_\infty)} \, dt$$

für t_1, t_2 groß genug

$$\in \underbrace{B_{\varepsilon(t_2-t_1)}\big((t_2-t_1)v_\infty\big)} \cap B_\varepsilon(0) = \emptyset$$

für $0 < \varepsilon < \frac{\|v_\infty\|}{2}$ und $t_2 - t_1 \geq 1$

Also ist $x(n)$ keine Cauchy-Folge

$\Rightarrow$ $x(n)$ nicht konv.

$\Rightarrow$ $x(t)$ nicht konv. $\square$