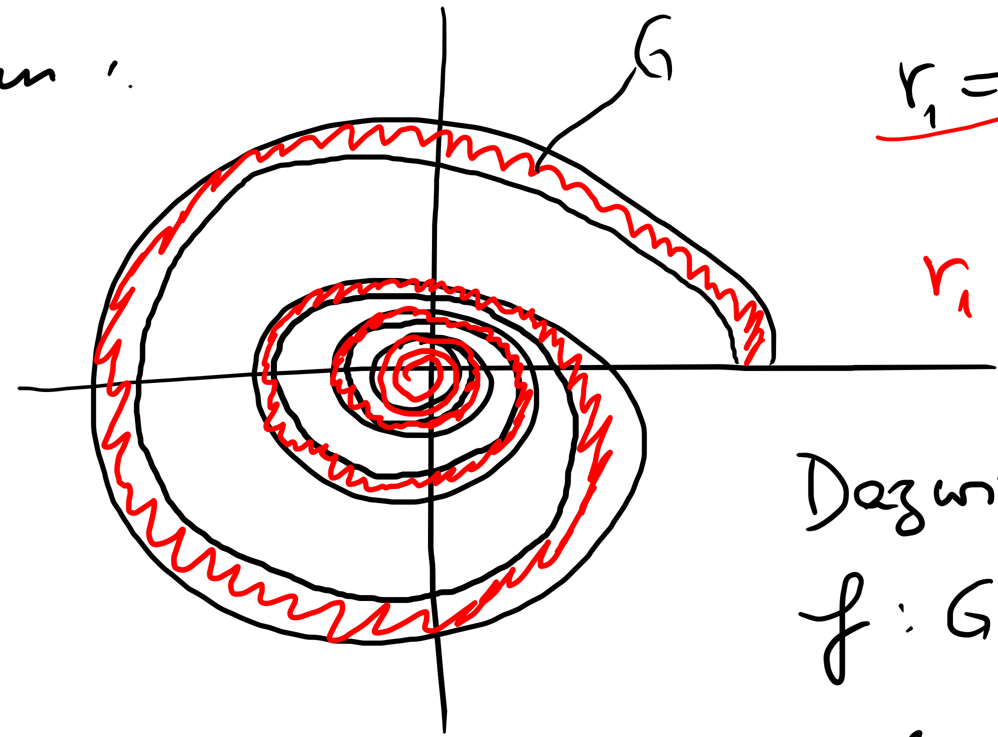
Erratum:



~~$r_1 = e^{-\varphi}, \quad r_2 = \frac{1}{2} e^{-\varphi}$~~

$r_1 = \frac{1}{\varphi}, \quad r_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi+2\pi}\right)$

Dazwischen liegt Gebiet G

$f : G \to \mathbb{R}$, "$f(x) = \varphi$"

Eigenschaft $\|Df\| \leq 1$, lok. Lip.

aber nicht global Lip.

Globale Existenz

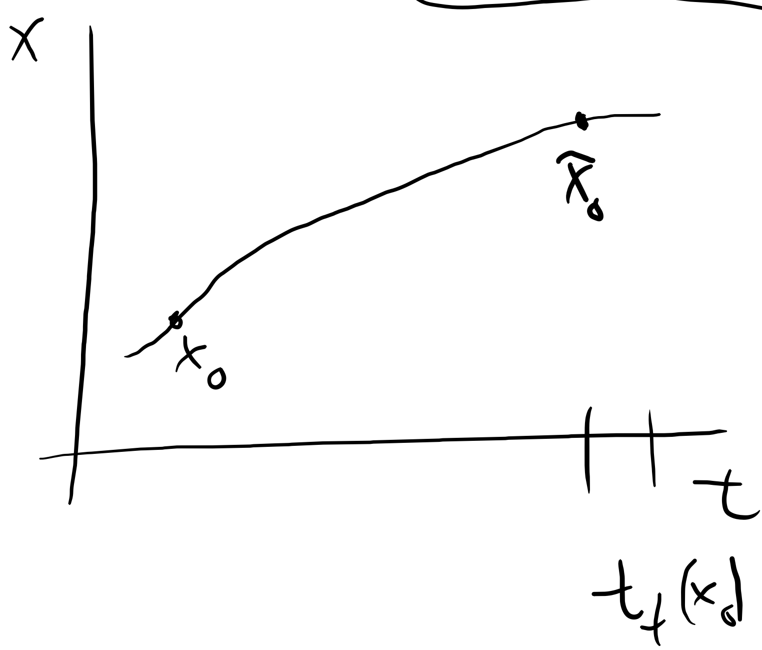
d.h. $I = \mathbb{R}$, $x_{max} : \mathbb{R} \to G$,

$t_-(x_0) = -\infty$, $\quad t_+(x_0) = \infty$

Lemma Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet,
$v : G \to \mathbb{R}^n$ lok. Lip.,
Wenn $\exists \delta > 0 \ \forall x_0 \in G : t_+(x_0) \geq \delta$,
dann ist jede max. Lsg. global, d.h. $t_+(x_0) = \infty$.

Bew Wäre $t_+(x_0) < \infty$, dann

$$\frac{\delta}{2} = t_+\Big(\underbrace{x_{max}\Big(t_+(x_0) - \frac{\delta}{2}\Big)}_{\tilde{x}_0 \in G}\Big) \geq \delta \ \lightning \qquad \square$$



<u>Prop</u> Wenn v global definiert ist, $v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und v global Lip., dann ~~ex~~

$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n \ \exists_1$ globale Lsg $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ von $\dot{x} = v(x)$ mit $x(0) = x_0$.

<u>Bew</u> SPL $\Rightarrow t_+(x_0) \geq \min \left\{ \frac{1}{L(x_0)}, \frac{r(x_0)}{M(x_0)} \right\}$

hier $L(x_0) = L$ unabh. von x_0

r so dass $\overline{B_r}(x_0) \subset G$, hier: $r > 0$ bel.

$$M(x_0) = \sup_{x \in \overline{B_r}(x_0)} \| v(x) \| \leq \sup_{x \in \overline{B_r}(x_0)} \underbrace{\| v(x) - v(x_0) \|}_{\leq L \| x - x_0 \| \leq L r} + \| v(x_0) \|$$

$$\leq L r + \| v(x_0) \|$$

$$\Rightarrow \frac{r(x_0)}{M(x_0)} \geq \frac{r}{\| v(x_0) \| + L r} = \frac{1}{L + \frac{\| v(x_0) \|}{r}},$$

wähle $r = \| v(x_0) \|$
(falls $v(x_0) \neq 0$
sonst $r = 1$)

$$\Rightarrow \quad \frac{r(x_0)}{M(x_0)} \geq \frac{1}{L+1}$$

also $t_+(x_0) \geq \frac{1}{L+1} =: \delta \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

Lemma $\Rightarrow$ Prop. $\square$

<u>Bsp</u> Newtonsche Mechanik

$\underline{q}_i(t) \in \mathbb{R}^3, \quad i \in \{1, \dots, N\}$

$$m_k \ddot{\underline{q}}_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} c_{jk} \frac{\underline{q}_j - \underline{q}_k}{\| \underline{q}_j - \underline{q}_k \|^3}$$

$$c_{jk} = G m_j m_k - \frac{e_j e_k}{4\pi \varepsilon_0}$$

Reduktion auf 1. Ordnung: $\underline{p}_i := m_i \dot{\underline{q}}_i$

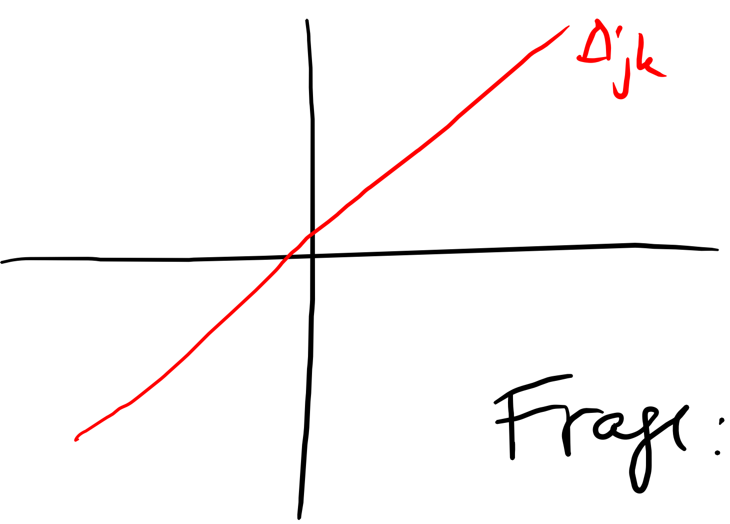
$$\begin{cases} \dot{\underline{q}}_k = \frac{1}{m_k} \underline{p}_k & = \underline{v}_k(x) \\ \dot{\underline{p}}_k = \sum_{j \neq k} c_{jk} \frac{\underline{q}_j - \underline{q}_k}{\| \qquad \|^3} & = \underline{v}_{N+k}(x) \end{cases}$$

$$x = (\underline{q}_1 \dots \underline{q}_N, \underline{p}_1 \dots \underline{p}_N) \in \mathbb{R}^{6N}$$

$$v \in C^\infty(G, \mathbb{R}^{6N}) \quad (\Rightarrow \text{lok. Lip.})$$

$$G = \{ x \in \mathbb{R}^{6N} \mid \forall j \neq k : \underline{q}_j \neq \underline{q}_k \}$$

$$= \mathbb{R}^{6N} \setminus \bigcup_{j \neq k} \Delta_{jk}, \quad \Delta_{jk} = \{ x \mid \underline{q}_j = \underline{q}_k \}$$



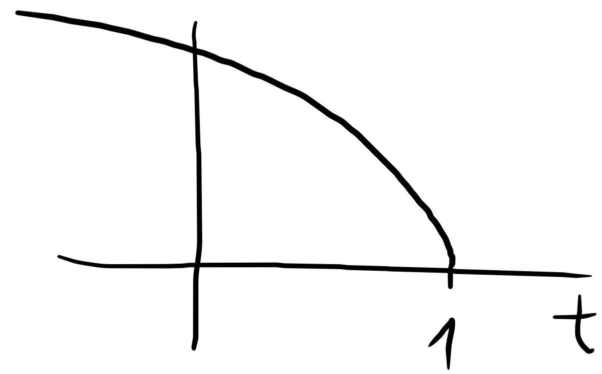
$$\dim \Delta_{jk} = 6N - 3$$

G offen, wegzus. $\Rightarrow$ Gebiet.

Frage: Ex. Lsg. $x(t)$ global?

Bsp $N=2$, $e_1 = 0 = e_2$, $m_1 = m_2 =: m$

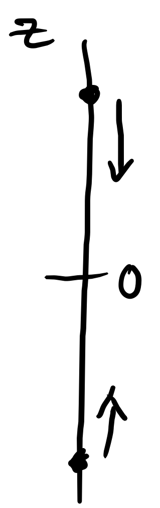
$$\underline{q}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1-t)^{2/3} R \end{pmatrix}$$

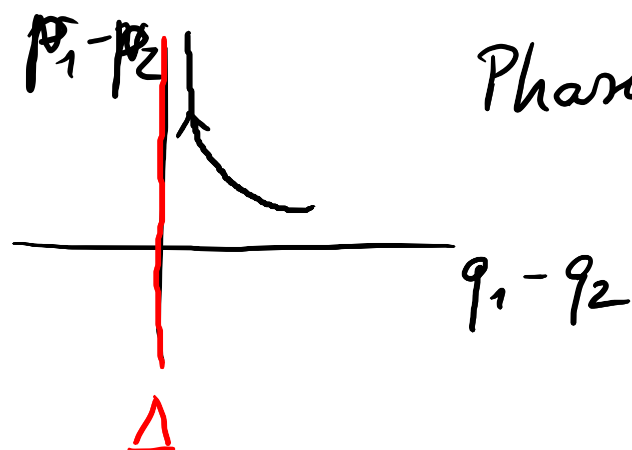


$$\underline{q}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(1-t)^{2/3} R \end{pmatrix}$$

$R = \frac{1}{2}(9 G m)^{1/3}$ ist eine Lsg. auf $(-\infty, 1)$

Teilchen kollidieren bei $t=1$.





Phasenraum

$$\|\dot{\underline{q}}_1(t)\| \xrightarrow{t \to 1} \infty$$

daher $t_+ = 1$.

max. Lsg. ex. nicht global.

<u>Vermutung</u> (ungelöst für $N \geq 5$,

bewiesen für $N = 2, 3, 4$ von ~~Do~~

Donald Saari 1977)

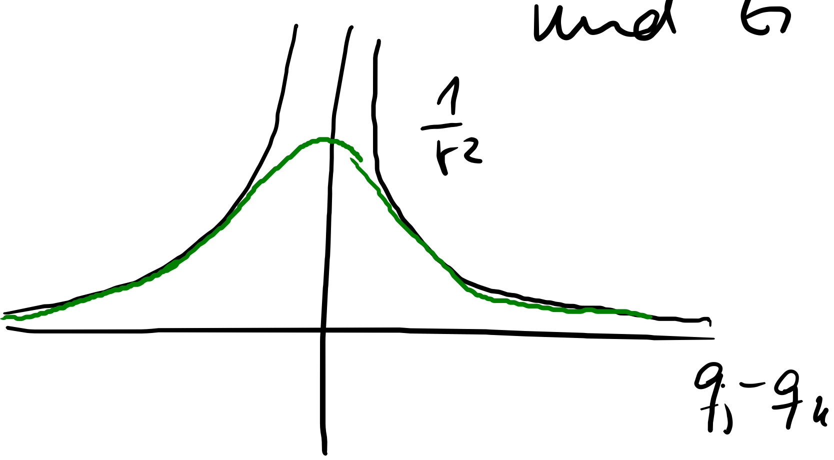
(geb. 1940)

$$\forall N \geq 2: \quad \mathrm{Vol}_{6N} \{ x_0 \in G \,/\, (t_-(x_0), t_+(x_0)) \neq (-\infty, \infty) \} = 0.$$

„Fast alle Lsg.en existieren global."

<u>Bem</u> Ersetzt man $\dfrac{\underline{q}_j - \underline{q}_k}{\| \underline{q}_j - \underline{q}_k \|^3}$ durch $\dfrac{1}{\underline{\| \underline{q}_j - \underline{q}_k \|^2 + \ell^2}} \dfrac{\underline{q}_j - \underline{q}_k}{\| \underline{q}_j - \underline{q}_k \|}$

und G durch $\mathbb{R}^{6N}$, dann ex. alle Lsg.en global.



Zeitabh. (nicht-autonome) ODEs

$$(*)\quad \begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(\cancel{t_0}\,\cancel{0}\,t_0) = x_0 \end{cases}$$

$f : G \to \mathbb{R}^n$

$G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ Gebiet

$(t_0, x_0) \in G$

Satz von Picard-Lindelöf für $(*)$

Sei f st. und lok. Lip. <u>in x</u>, d.h.,

$\forall (t_1, x_1) \in G \; \exists$ Umg $U \subset G$ von (t_1, x_1) $\exists L > 0$
$\forall (t,x), (t,y) \in U$:

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| \le L \| x - y \|.$$

Dann ex. $\delta > 0$ und eine Lsg $x : \cancel{(-\delta, \delta)}\ (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to G$ des AWP $(*)$; die Lsg. ist eind. (im Sinne wie zuvor).
(Ohne Beweis)

Korollar Wenn f global def., $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ und global Lip. in x, d.h. $\forall t \in \mathbb{R}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| \leq L \| x - y \|,$$

dann ex. $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ eine eind. globale Lsg $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ von $(*)$.

Kap 9: Lineare DGlen

Def 9.1, 9.15, Eine DGL in 1 Variable x heißt linear, wenn sie von der Form

$$\frac{d^r x}{dt^r} = \sum_{k=0}^{r-1} a_k(t) \frac{d^k x}{dt^k} + b(t) \quad (1)$$

ist mit geg. Koeffizientenfunktionen $a_k : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, und geg. $b : I \to \mathbb{R}$.
Sie heißt homogen, wenn $b(t) = 0 \ \forall t \in I$, sonst inhomogen, b heißt die Inhomogenität.

Bspe $\ddot{x} = \dot{x}^2$ nicht-linear
$\ddot{x} = -\omega^2 x$ linear (harmonischer Oszillator)
homogen, konstante Koeffizienten $\omega = \text{const.}$, autonom

$\ddot{x} = \dot{x} x$ nicht-linear

$\ddot{x} = -\sin x$ nicht-linear

$\ddot{x} = -(\sin t) x$ linear, homogen

$\ddot{x} = -\sin t$ linear, inhomogen.

<u>Def</u> 9.1 Eine DGl in n Variablen $(x_1, \dots, x_n)$ heißt <u>linear</u>, wenn sie von der Form

$$\frac{d^r \underline{x}}{dt^r} = \sum_{k=0}^{r-1} A_k(t) \frac{d^k \underline{x}}{dt^k} + \underline{b}(t) \qquad (2)$$

ist mit geg. Koeffizientenmatrizen $A_k : I \longrightarrow \underbrace{M_n(\mathbb{R})}_{n \times n}$,

$I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, und geg. $\underline{b} : I \to \mathbb{R}^n$;

<u>homogen</u>, falls $\underline{b}(t) = 0 \ \forall t \in I$.

<u>Bsp</u> Grad $r=1$: $\underline{\dot{x}}(t) = A(t)\, \underline{x}(t) + \underline{b}(t)$.

$f(t, \underline{x}) = A(t) \underline{x} + \underline{b}(t)$ affin-linear in $\underline{x}$

<u>Bem</u> Reduktion Grad $r \longrightarrow$ Grad 1 bleibt linear

<u>Bericht</u> (Bew später) Satz 9.3

Seien $A_k : I \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ $(k = 0, \ldots, r-1)$

und $\underline{b} : I \to \mathbb{R}$ st.

Dann ex. $\forall t_0 \in I$ $\forall \underline{x}_{0,k} \in \mathbb{R}^n$ eine eind. max Lsg.

von $\begin{cases} (2) \\ \dfrac{d^k \underline{x}}{dt^k}(t_0) = \underline{x}_{0,k} \qquad (k = 0, \ldots, r-1) \end{cases}$

und ist auf ganz I definiert (globale Ex.).

<u>Satz 9.5(a)</u>

Seien $\underline{b} = 0$, $A_k : I \to M_n(\mathbb{R})$ st.

$L_h :=$ Menge aller max. Lsgen von (2)

$$= \left\{ \underline{x} \in C^r(I, \mathbb{R}^n) \;\middle|\; \left(\frac{d}{dt}\right)^r \underline{x} = \sum_{k=0}^{r-1} A_k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \underline{x} \quad \forall t \in I \right\}$$

Dann ist L_h nr-dim Unterraum von $C^r(I, \mathbb{R}^n)$.
(„Superpositionsprinzip")