Lebensdauer der Lsg.

$$\left[\begin{array}{l} \dot{x} = v(x) \\ x(0) = x_0 \\ v : G \to \mathbb{R}^n \\ G \subset \mathbb{R}^n \text{ offen} \end{array}\right.$$

Beweis Picard-Lindelöf

$$\delta := \min\left\{ \frac{1}{L}, \frac{r}{M} \right\}$$

$r = \operatorname{dist}(x_0, \partial G)$

$M = \|v\|_\infty$ auf $\overline{B_r(x_0)}$

$L =$ Lip.konst. ~~a~~ für v auf $\overline{B_r}(x_0)$

$\rightsquigarrow \exists\, x : (-\delta, \delta) \to G$ Lsg.

Spezielles Vektorfeld

$v = \operatorname{grad} F$, $\quad F \in C^1(G, \mathbb{R})$

$F : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\quad \dot{x} = v(x)$

Anschaulich: grad F zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs von F.

Aufgabe: Zeige, dass $F(x(t))$ monoton wächst.

Antwort:
$$\frac{d}{dt} F(x(t)) = \nabla F(x(t)) \cdot \dot{x}(t)$$
$$= \nabla F(x(t)) \cdot v(x(t))$$
$$= \nabla F(x(t)) \cdot \nabla F(x(t))$$
$$= \|\nabla F(x(t))\|^2 \geq 0. \qquad \square$$

Satz von Picard-Lindelöf

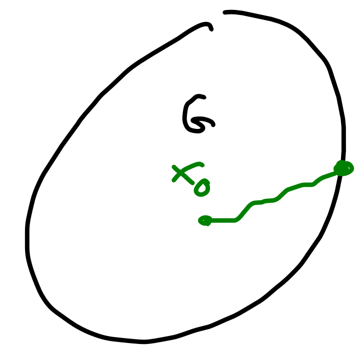
<u>Satz:</u> Für das DGL-AWP $\begin{cases} \dot{x} = v(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

mit $v : G \to \mathbb{R}^n$

$G \subset \mathbb{R}^n$ offen gilt:

Falls v lok. Lip., dann

$\exists\, \delta > 0$: auf $(-\delta, \delta)$ ex. genau 1 Lsg. x des AWP.



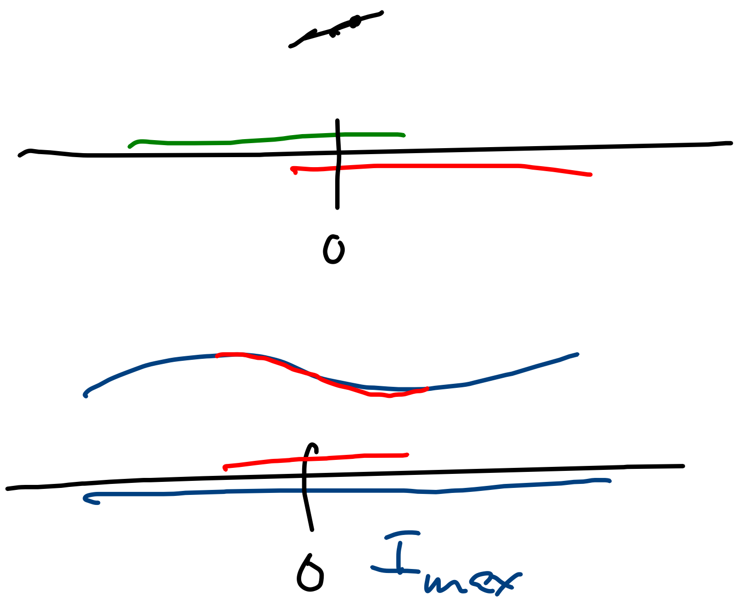
<u>Korollar:</u> Falls v lok. Lip., dann ex. (zu jeg. x_0) genau 1 max. Lsg. des AWP.

Max. Lsg.: eine, die nicht fortgesetzt werden kann, die "nicht ohne Grund endet".

Def Lsg: (I, x) mit $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $0 \in I$

$x : I \to G$ mit $\dot{x} = v(x)$

$x(0) = x_0$

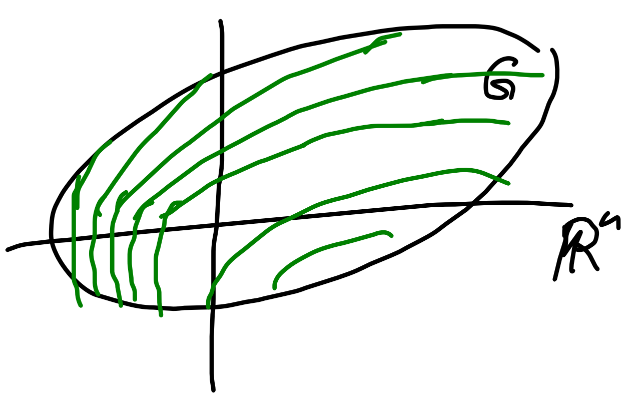


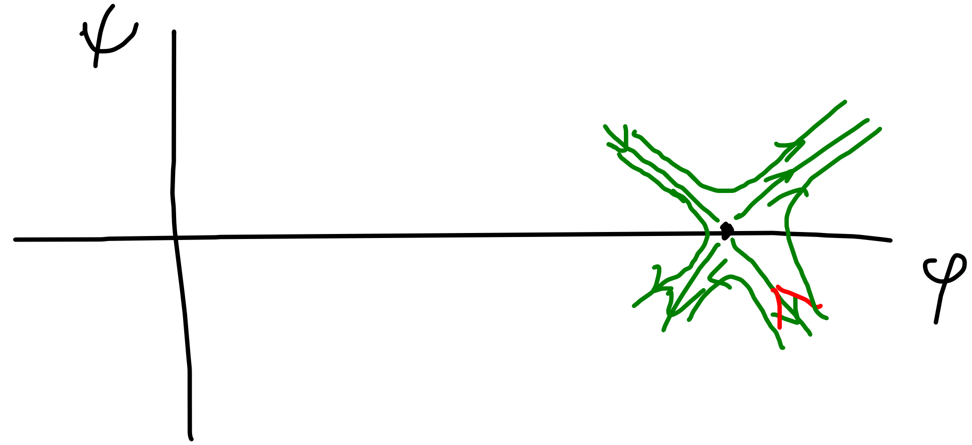
max. Lsg: (I_{max}, x_{max})

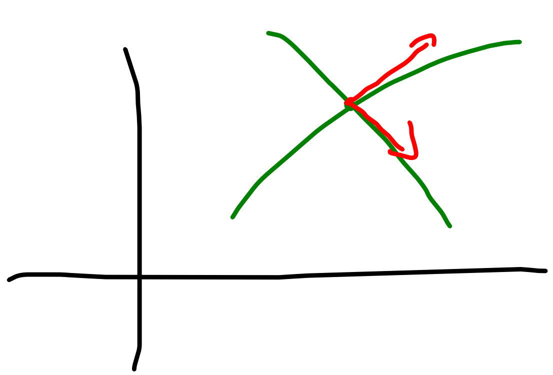
derart, dass $\forall$ Lsg (I, x):

$$I \subset I_{max}, \quad x_{max}\big|_I = x .$$

Konsequenz: Trajektorien im Phasenraum können sich nicht schneiden.







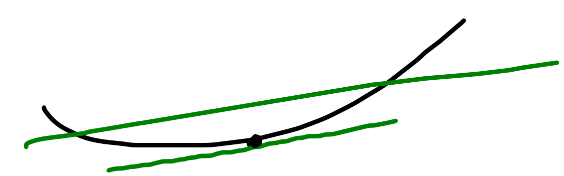
unmöglich

unmöglich

$\Uparrow$

SPL

<u>Bsp</u> SPL $\Rightarrow$ DGL $\frac{dx}{dt}=0$ hat nur konst. Lsgen

(Beweis zuvor: Mittelwertsatz )

<u>nicht-autonome Version des Satzes von PL:</u>

Für das DGL-AWP $\frac{dx}{dt}=f(x,t)$, $x(t_0)=x_0$, $f: G \to \mathbb{R}^n$ und $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen gilt: Falls f lok. Lip. <u>in x</u>, dann $\exists\, \delta>0$: auf $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ ex. eind. Lsg. des AWP.

Reduktion der Ordnung

Aufgabe: Reduziere auf 1. Ordg.:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = t^5 \frac{d^2x}{dt^2} - e^t \frac{dx}{dt}, \quad x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

y

Antwort:

$$y_0 := x \qquad y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$y_1 := \frac{dx}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ t^5 y_2 - e^t y_1 \end{pmatrix}$$

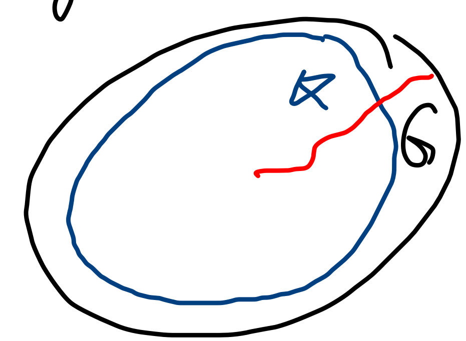
$$y_2 := \frac{d^2x}{dt^2}$$

Globale Existenz

d.h. $x_{max} : \mathbb{R} \to G$

$$t_-(x_0) = -\infty, \quad t_+(x_0) = \infty$$

Satz: Sei v lok. Lip. Wenn eine Lsg. x nicht global ex., sagen wir $t_+(x_0) < \infty$, dann verlässt sie jedes Kompaktum in G.

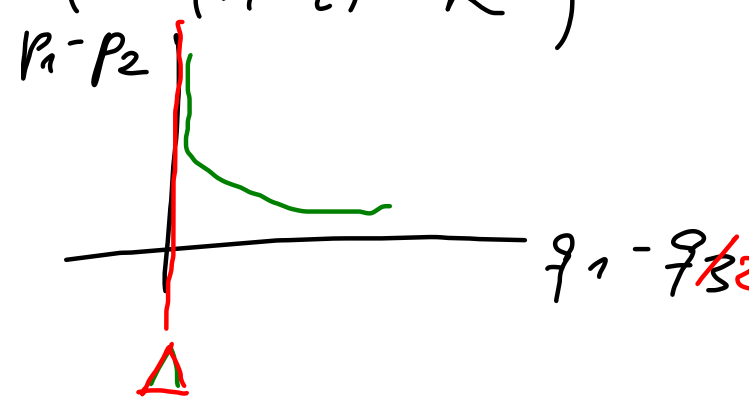


Bsp Newtonsche Mechanik, Kollisionslsg

$$\underline{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1-t)^{2/3} R \end{pmatrix}, \quad \underline{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(1-t)^{2/3} R \end{pmatrix}$$

$$I_{max} = (-\infty, 1)$$

$$G = \mathbb{R}^{12} \setminus \underbrace{\Delta}_{\{\underline{q}_1 = \underline{q}_2\}}$$



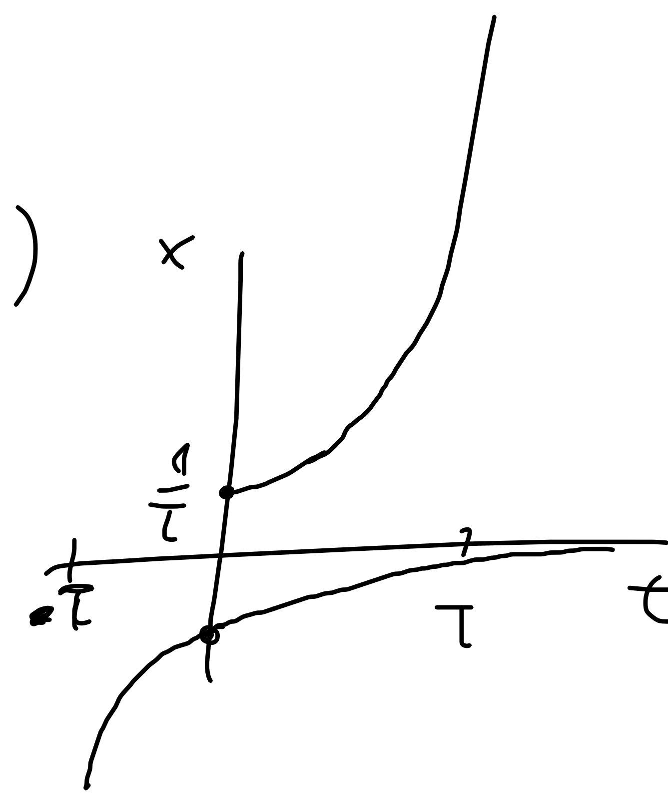
Lemma Wenn v lok. Lip. und jede Lsg noch mind. für die Zeit $\delta > 0$, dann ex. alle Lsgen global.

Prop Wenn v global def. $(G = \mathbb{R}^n)$ und global Lip. ist, dann ex. alle Lsgen global.

Konsequenz. Für homogene lineare DGL mit konst. Koeff., $\frac{dx}{dt} = Ax$, ex. alle Lsgen global.

Bsp

- $n=1$, $\frac{dx}{dt} = 2x$ hat Lsgen $x(t) = x_0 e^{2t}$
  (läuft in ∞ Zeit nach ∞)



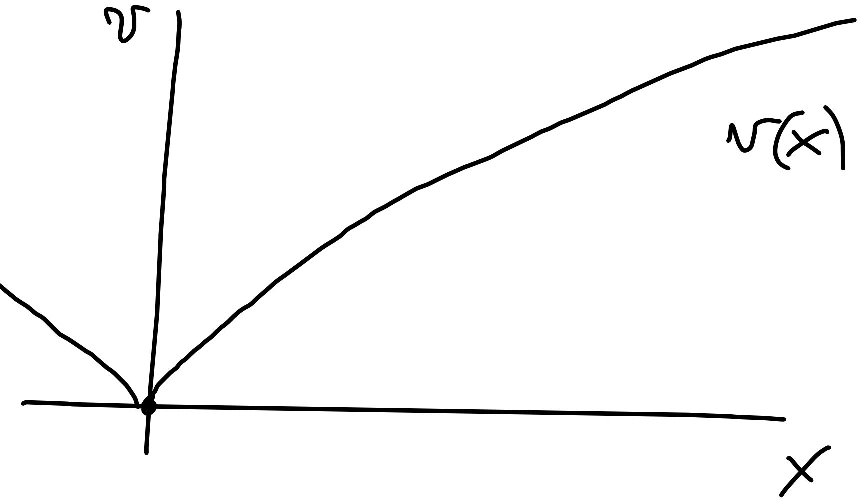
- $n=1$, $\frac{dx}{dt} = x^2$ hat Lsgen $x(t) = \frac{1}{\tau - t}$

- $n=1$: $\frac{dx}{dt} = \ln(1+|x|)$

  v global def.

  global Lip. $L=1$

  $\Rightarrow$ alle Lösgen ex.en global.



Lineare DGl.

Aufgabe: Linear oder nicht?

a) $t^4 \frac{d^2x}{dt^2} + e^t \frac{dx}{dt} = 0$ ja

b) $\frac{\dot{x}}{x} = t$ ja

c) $\dot{x} = \frac{t}{x}$ nein

d) $\dot{x} = \frac{x}{t}$ ja

Erhaltungsgrößen

d.h. $F : G \to \mathbb{R}$, $\quad F(x(t)) = \text{const.}$

$\forall$ Lsgen. $\dot{x} = v(x)$

<u>Bsp</u> Eine Tür wird geöffnet zwischen 2 Räumen mit $v(0) = 30$ und $w(0) = 10$ Personen.
Der Austausch zwischen den Räumen ist proportional zur Differenz $v - w$:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = w - v \\[2ex] \dfrac{dw}{dt} = v - w \end{cases}$$

Aufgabe: Zeige, dass $v(t) + w(t) = \text{const.}$

Lösung: $\dfrac{d}{dt}\big(v(t) + w(t)\big)$

$$= \frac{dv}{dt} + \frac{dw}{dt} = (w - v) + (v - w) = 0.$$

$\square$

$F(v, w) = v + w.$

Flussabb.

$$\varphi(t, x_0) = x(t) \quad \text{für } x(0) = x_0, \quad \dot{x} = v(x)$$

$$\varphi_t(x_0)$$

"Zeitentwicklungsabb."

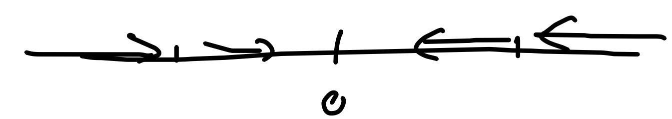
weil $\text{Zustand}(0) \xmapsto{\varphi_t} \text{Zustand}(t)$

$\text{Zustand}(t_0) \longmapsto \text{Zustand}(t_0 + t)$

<u>Bsp</u> $n=1$, $v(x) = -2x$, d.h. $\dfrac{dx}{dt} = -2x$

hat globale Lösungen $x(t) = x_0 e^{-2t}$, also

$\varphi_t(x) = x\, e^{-2t}$, $\varphi_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

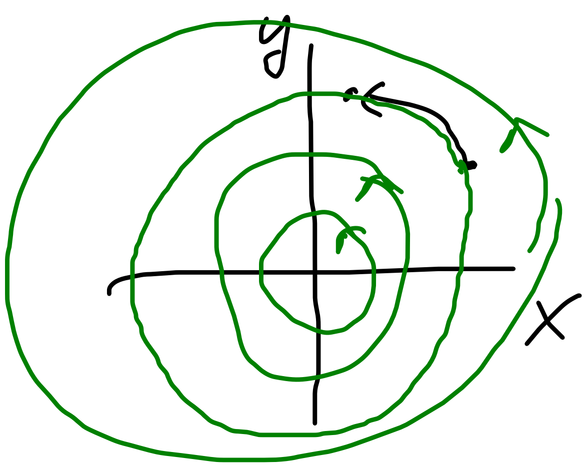


<u>Bsp</u> $n=2$, $v\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ d.h. $\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y \\ \frac{dy}{dt} &= x \end{aligned} \right.$

hat globale Lösungen

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix}, \text{ d.h.}$$

$$\varphi_t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$



$$\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$$

Kompositions-Eigenschaft