Lineare Dgl.en

Def linear:

$$\frac{d^r \underline{x}}{dt^r} = \sum_{k=0}^{r-1} A_k(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^k \underline{x} + \underline{b}(t) \qquad (2)$$

$\underline{x} : \underline{I} \to \mathbb{R}^n$

$A_k : I \to M_n(\mathbb{R})$

$\underline{b} : I \to \mathbb{R}^n$

Satz 9.3 $\quad A_k : I \to M_n(\mathbb{R})$ st., $\underline{b} : \underline{I} \to \mathbb{R}^n$ st.

$\Longrightarrow$ $\exists$ alle Lsgen global

genauer: $\forall t_0 \in \underline{I}\ \forall \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n\ \exists_1\ \underline{x}_{max} : \underline{I} \to \mathbb{R}^n$

Satz 9.5(a) (Superpositionsprinzip)

Seien $\underline{b} = 0$, $A_k : I \to M_n(\mathbb{R})$ st.,

$$L_h := \text{Menge aller max. Lsg.en von (2)}$$
$$= \left\{ \underline{x} \in C^r(I, \mathbb{R}^n) \,\middle|\, (2) \right\}.$$

Dann ist L_h nr-dim Unterraum von $C^r(I, \mathbb{R}^n)$.

Bew Seien $\underline{x}, \underline{\tilde{x}} \in L_h$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^r (\underline{x} + \underline{\tilde{x}}) = \frac{d^r \underline{x}}{dt^r} + \frac{d^r \underline{\tilde{x}}}{dt^r}$$
$$= \sum_{k=0}^{r-1} A_k(t) \frac{d^k \underline{x}}{dt^k} + \sum_{k=0}^{r-1} A_k(t) \frac{d^k \underline{\tilde{x}}}{dt^k}$$
$$= \sum_{k=0}^{r-1} A_k(t) \frac{d^k}{dt^k} (\underline{x} + \underline{\tilde{x}}), \quad \text{d.h. } \underline{x} + \underline{\tilde{x}} \in L_h.$$

und $\frac{d^r}{dt^r}(\lambda \underline{x}) = \lambda \frac{d^r}{dt^r}\underline{x} = \lambda \sum_{k=0}^{r-1} A_k(t) \frac{d^k}{dt^k}\underline{x}$

$= \sum_{k=0}^{r-1} A_k(t) \frac{d^k}{dt^k}(\lambda \underline{x})$, d. h. $\lambda \underline{x} \in L_h$.

Dim: Wähle $t_0 \in I$. Die Abb. $L_h \to (\mathbb{R}^n)^r$

$\underline{x} \longmapsto \left(\underline{x}(t_0), \dot{\underline{x}}(t_0), \ldots, \frac{d^{r-1}\underline{x}}{dt^{r-1}}(t_0) \right)$ ist

linear und bij. wg. Satz 9.3.

$\Rightarrow \dim L_h = \dim (\mathbb{R}^n)^r = nr.$ $\square$

Bem • Brauchen nur nr lin. unabh.
spezielle Lsg.en ("Fundamentalsystem", Def. 9.7)

Bsp: $\ddot{x} = -\omega^2 x$ $(n=1, r=2)$

$\{ t \mapsto \cos(\omega t), t \mapsto \sin(\omega t) \}$ Fund. syst.

$L_h = \{ t \mapsto a \cos \omega t + b \sin \omega t \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

- Wie verschaffen wir uns ein Fund.syst.?

Bei konst. Koeff.: <u>Exponentialansatz</u>

d.h. für $n=1$: Probierfkt $x(t)=e^{\lambda t}$

einsetzen in Dgl. $\rightsquigarrow$ mögl. Werte für λ $\leftarrow$ Nullstellen von $\sum_{k=0}^{r-1} a_k \lambda^k - \lambda^r$

liefert mehrere spez. Lsg.en

ÜA: für k-fache mehrfache Nullstellen

auch $x(t) = t^j e^{\lambda t}$, $\quad j=0,1,\dots,k-1$

lin. unabh. $\rightsquigarrow$ Fund.syst.

Bsp: $\ddot{x} = -\omega^2 x$, $\quad x = e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} = -\omega^2 \cancel{e^{\lambda t}} \Rightarrow \lambda = \pm i\omega$$

Fund.syst. $\{t \mapsto e^{i\omega t},\ t \mapsto e^{-i\omega t}\}$

Brauchen <u>komplexe Dgl.en</u>:

$\underline{x} : I \to \mathbb{C}^n$ (t reell!)

$\dot{\underline{x}} = f(t, \underline{x})$

SPL gilt immer noch, weil $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$

<u>Def</u> <u>komplex-lineare Dgl.</u> für $\underline{x} : I \to \mathbb{C}^n$

$$\frac{d^r \underline{x}}{dt^r} = \sum_{k=0}^{r-1} A_k(t) \frac{d^k \underline{x}}{dt^k} + \underline{b}(t)$$

mit $A_k : I \to M_n(\mathbb{C})$ und $\underline{b} : I \to \mathbb{C}^n$.

<u>Bem</u> Weil jede $\mathbb{C}$-lin. Abb. auch $\mathbb{R}$-lin. ist (und jeder $\mathbb{C}$-VR auch $\mathbb{R}$-VR), ist jede $\mathbb{C}$ lin. Dgl. auch $\mathbb{R}$-lin.

$$\underset{A_k,\, \underline{b} \text{ st.}}{\overset{\text{Satz 9.3}}{\Longrightarrow}} \quad \forall t_0 \in I \ \forall \underline{x}_0 \in \mathbb{C}^n \ \exists_1 \text{ globale Lsg } \underline{x}$$

Wie Satz 9.5a) beweist man:
(komplexes Superpositionsprinzip)

<u>Satz</u> $L_h^{\mathbb{C}} := \left\{ \underline{x} \in C^r(I, \mathbb{C}^n) \,\middle|\, \left(\frac{d}{dt}\right)^r \underline{x} = \sum_{k=0}^{r-1} A_k(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^k \underline{x} \right\}$

ist $\mathbb{C}$-Unterraum mit $\dim_{\mathbb{C}} L_h^{\mathbb{C}} = nr$.

<u>Bsp</u> $\ddot{x} = -\omega^2 x$ ($\omega \in \mathbb{R}$ geg.), wollen $L_h^{\mathbb{R}}$

Trick: betrachte $\mathbb{C}$-DGL. $\ddot{x} = -\omega^2 x$ (Koeff. zufällig reell)

suche $L_h^{\mathbb{C}}$. Wissen $\dim_{\mathbb{C}} L_h^{\mathbb{C}} = 2$, $\dim_{\mathbb{R}} L_h^{\mathbb{C}} = 4$.

Exponentialansatz $\Rightarrow L_h^{\mathbb{C}} = \{ t \mapsto a e^{i\omega t} + b e^{-i\omega t} \mid a, b \in \mathbb{C} \}$

Beobachtung: $L_h^{\mathbb{R}} \subset L_h^{\mathbb{C}}$, tats. $L_h^{\mathbb{R}} = \{ x \in L_h^{\mathbb{C}} \mid x(t) \in \mathbb{R} \ \forall t \}$

$= \{ x \in L_h^{\mathbb{C}} \mid x(0), \dot{x}(0) \in \mathbb{R} \}$

Sei $x \in L_h^{\mathbb{C}}$. $x \in L_h^{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$

$\forall t \in \mathbb{R}$: $0 = \operatorname{Im} x(t) = \operatorname{Im}(a e^{i\omega t} + b e^{-i\omega t})$

$\left[\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i} \right]$

$$= \frac{1}{2i}\Big(a e^{i\omega t} - \bar{a} e^{-i\omega t}$$

$$+ b e^{-i\omega t} - \bar{b} e^{i\omega t}\Big)$$

$\left[e^{\bar{z}} = \overline{e^{z}} \right]$

$$= \frac{1}{2i}\Big((a-\bar{b}) e^{i\omega t} + (b-\bar{a}) e^{-i\omega t}\Big)$$

$$\Leftarrow \quad a = \bar{b}$$

$$\Rightarrow \quad (t=0) \qquad (a-\bar{b}) + (b-\bar{a}) = 0$$

$$\left(t = \frac{\pi}{2\omega}\right) \quad \underline{(a-\bar{b})\cancel{i} + (b-\bar{a})(\overset{(-1)}{\cancel{-i}}) = 0}$$

$$a - \bar{b} = 0$$

Also $x \in L_h^{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x(t) = a e^{i\omega t} + \bar{a} e^{-i\omega t}$

$\left[z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z \right]$

$$= 2 \operatorname{Re}\left(a e^{i\omega t}\right)$$

$$= 2 \operatorname{Re}(a) \cos \omega t - 2 \operatorname{Im}(a) \sin \omega t.$$

Also $L_h^{\mathbb{R}} = \operatorname{span}\{ t \mapsto \cos \omega t, \ t \mapsto \sin \omega t \}$

Inhomogene Dgl.

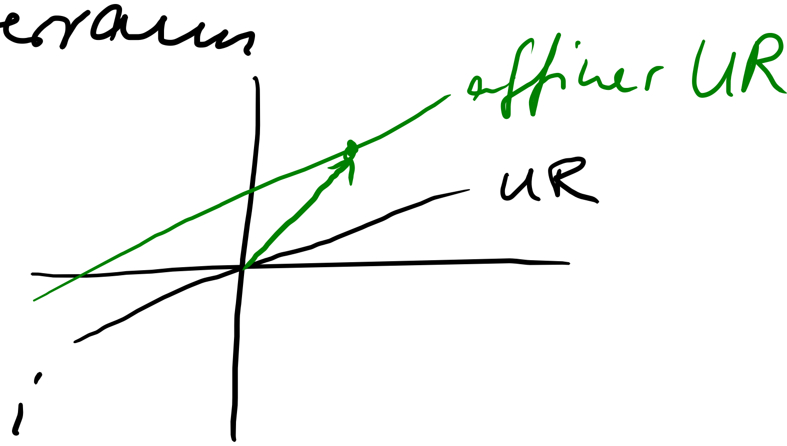
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Satz 9.8 a) Seien $\underline{b} : I \to \mathbb{K}^n$ st., $A_k : I \to M_n(\mathbb{K})$ st.

$L_i :=$ Menge aller Lsgen von (2)

$$= \left\{ \underline{x} \in C^r(I, \mathbb{K}^n) \;\middle|\; \left(\frac{d}{dt}\right)^r \underline{x} = \sum_{k=0}^{r-1} A_k(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^k \underline{x} + \underline{b} \quad \forall t \in I \right\}$$

Dann ist L_i ein nr-dim. affiner Unterraum von $C^r(I, \mathbb{K}^n)$, und zwar



$$L_i = \underline{\tilde{x}} + L_h \quad \text{für bel. } \underline{\tilde{x}} \in L_i$$

" $x_{\text{allg. inhom}} = x_{\text{spez. inhom.}} + x_{\text{allg. hom.}}$ "

Bew Sei $\underline{\tilde{x}} \in L_i$, $\cancel{\underline{x} \in L_h}$

1) $\underline{\tilde{x}} + L_h \subset L_i$: Sei $\underline{x} \in L_h$. Dann $\underline{\tilde{x}} + \underline{x} \in L_i$,

denn $\left(\frac{d}{dt}\right)^r (\underline{\tilde{x}} + \underline{x}) = \sum\limits_k A_k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \underline{\tilde{x}} + \underline{b} + \sum\limits_k A_k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \underline{x}$,

also $\underline{\tilde{x}} + \underline{x} \in L_i$.

2) $\underline{\tilde{x}} + L_h \supset L_i$

Sei nun $\underline{x} \in L_i$ bel., dann ist $\underline{x} - \underline{\tilde{x}} \in L_h$,

denn
$$\left(\frac{d}{dt}\right)^r (\underline{x} - \underline{\tilde{x}}) = \sum_k A_k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \underline{x} + \cancel{\underline{b}} - \left(\sum_k A_k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \underline{\tilde{x}} + \cancel{\underline{b}}\right)$$
$$= \sum_k A_k \left(\frac{d}{dt}\right)^k (\underline{x} - \underline{\tilde{x}}). \qquad \square$$

Frage: Wie verschaffen wir uns $x_{\text{spez. inhom}}$?

Später mehr.

Matrix-Exponential

Beobachtung: Reduktion auf 1. Ordg. von linear ist linear

$$\underline{\dot{x}} = A\,\underline{x}\quad,\quad \text{ges. } \underline{x}(t) \in \mathbb{K}^n,\ \text{ geg. } A \in M_n(\mathbb{K})$$

allg. hom. lin. Dgl. 1. Ordg.

Falls $n=1$: $\dot{x} = ax$ hat Lsgen $x(t) = e^{at} x_0$.

Allg. n: **Beh 1** Die Lsg des AWP $\underline{\dot{x}} = A\underline{x}$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ ist $\underline{x}(t) = e^{At}\,\underline{x}_0$.

Def $\forall B \in M_n(\mathbb{C})$

$$e^B := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k$$

Bem $B^0 = E_n$, daher $e^{0_n} = E_n$.

<u>Beh 2</u> Die Reihe konv. (sogar abs.)

$\forall B \in M_n(\mathbb{C})$.

<u>Bem</u> abs. Konv $\Rightarrow$ Konv, d. h.
sei X Banachraum, $x_n \in X$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n \quad \text{konv.}$$

("abs. konv.")

<u>Bew</u> $S_N := \sum_{n=0}^{N} x_n$,

$$\|S_N - S_M\| = \left\| \sum_{n=M+1}^{N} x_n \right\| \le \sum_{n=M+1}^{N} \|x_n\|$$

$$\le \sum_{n=M+1}^{\infty} \|x_n\| < \varepsilon \quad \text{für } M > M_0(\varepsilon)$$

Also ist $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge $\overset{\text{vollst.}}{\Longrightarrow}$ konv. $\square$

Bew von Beh 2   z.z. $\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{k!} B^k \right\| < \infty$

$\|C\| =$ Operatornorm auf $M_n(\mathbb{C})$

$=$ kleinste Lip.-Konst.

$$= \sup_{v \neq 0} \frac{\|Cv\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|Cv\|$$

$= \max\{ |\lambda| \mid \lambda$ EW von $C\}$ falls C diagbar

Regeln $\|Cv\| \leq \|C\| \, \|v\|$ (klar)

$\|CD\| \leq \|C\| \, \|D\|$ (folgt daraus)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{k!} B^k \right\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|B^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|B\|^k$$

$$= e^{\|B\|} < \infty . \qquad \square$$