Matrix-Exponential

e^A, $A \in M_n(\mathbb{C})$ $n \times n$-Matrix

Def $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$

Beh 1 Die Lsg von $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ zum AW $\underline{x}_0$ lautet $\underline{x}(t) = e^{At}\,\underline{x}_0$.

Beh 3 Funktionalgleichung

Seien $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Wenn $AB = BA$, dann

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

Bew $e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A+B)^k$

$$(A+B)^k = (A+B)(A+B)\cdots(A+B)$$

$$= A^k + BA^{k-1} + ABA^{k-2} + A^2BA^{k-3} + \dots + A^{k-1}B$$

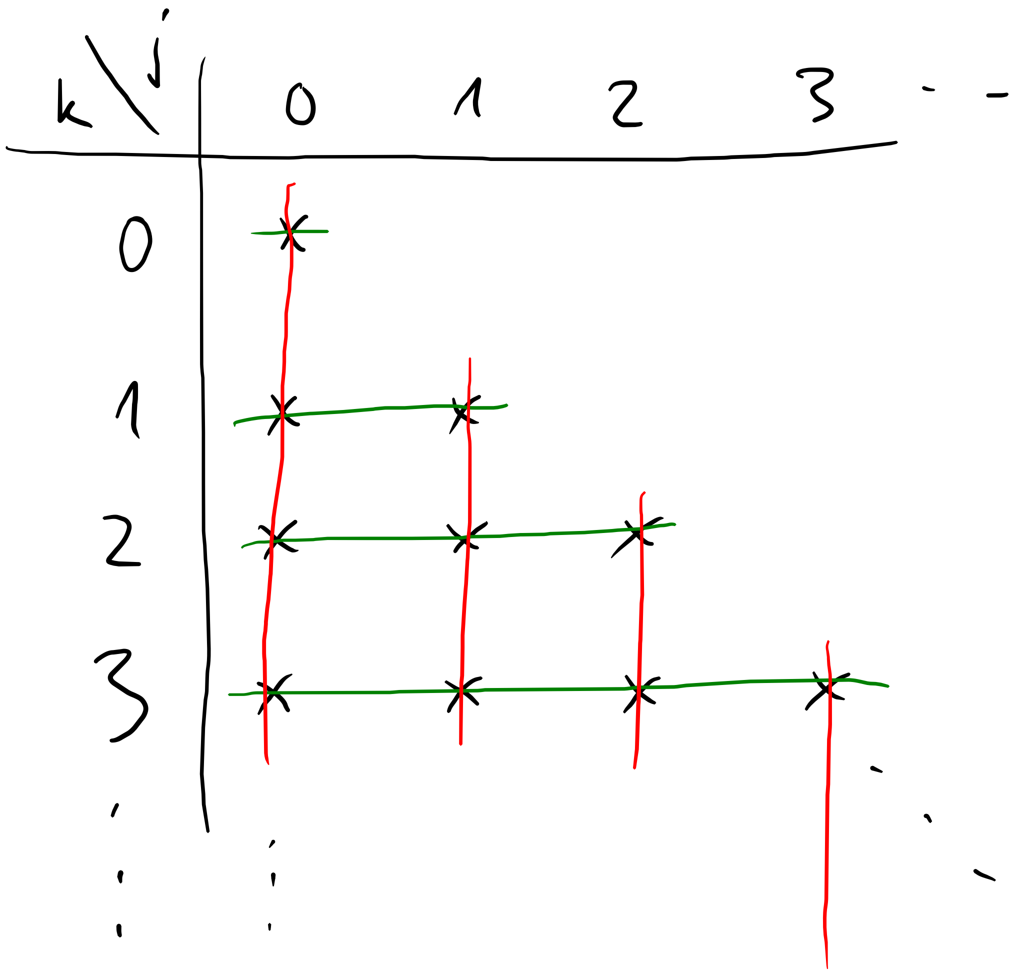
$$+ BBA^{k-2} + BABA^{k-3} + \dots + BA^{k-2}B$$

$$+ ABBA^{k-3} + \dots + B^k$$

$$\overset{AB=BA}{=} A^k + kBA^{k-1} + \binom{k}{2}B^2A^{k-2} + \dots + B^kA^0$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B^j A^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cancel{B} A^{k-j} B^j$$

Also $e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\cancel{k!}} \frac{\overset{1}{\cancel{k!}}}{j!(k-j)!} A^{k-j} B^j$



(Satz 5,28)

Ana 1 Umordnungssatz für Doppelreihen:

gilt auch in Banach-räumen

Wenn $\sum_{mn} |x_{mn}|$ spaltenweise oder zeilenweise in irgendeiner Reihenfolge (d.h. Abzählung von $\mathbb{N}^2$) konv., dann auch $\sum_{mn} x_{mn}$, und zwar in allen 3 Weisen gegen denselben Wert.

Hier: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \left\| \frac{1}{j!\,(k-j)!} A^{k-j} B^{j} \right\|$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \frac{1}{(k-j)!} \|A\|^{k-j} \|B\|^{j}}_{\frac{1}{k!}\left(\|A\|+\|B\|\right)^{k}}$$

$$= e^{\|A\|+\|B\|} < \infty \Longrightarrow \text{Umordnen erlaubt!}$$

Also $\displaystyle e^{A+B} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{j!\,(k-j)!} A^{k-j} B^{j}$

$$\overset{l=k-j}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\cancel{j!}\; l!} A^{l} \right) \frac{B^{j}}{j!}$$

$$= \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} A^l \right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} B^j$$

$$= e^A \; e^B \qquad \square$$

<u>Beh 4</u> $t \mapsto e^{At}$, $\mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$

ist diffbar und

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$$

<u>Bew</u> Wenn man gliedweise differenzieren darf,

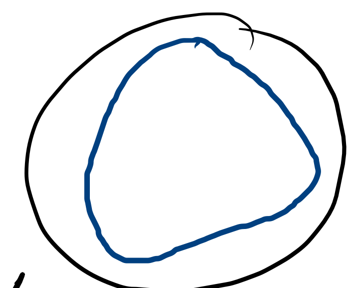
dann $\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{(At)^k}_{A^k t^k} = \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{\infty} \frac{1}{\cancel{k!}_{(k-1)!}} A^k \cancel{k} t^{k-1} \overset{l=k-1}{=} A \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} A^{\cancel{l+1}} t^l$

$$= A \; e^{At} = e^{At} A.$$

Ana 1 Satz 7.35: Man darf ~~Potenzreihen~~ Reihen $f_n(t)$ gliedweise differenzieren, wenn

(gilt auch in Banachräumen)

1) die Reihe punktweise abs. konv. und
2) die gliedweise differenzierte Reihe glm. abs. konv.



ad 1) Bsp 2 ✓

ad 2) Wir zeigen das auf jedem Kompaktum $K \subset \cancel{M_n(\mathbb{C})}\ \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{1}{(k-1)!} A^k t^{k-1} \right\| = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{\ell!} A^{\ell+1} t^{\ell} \right\|$$

$$\leq \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \|A\|^{\ell+1} \underbrace{|t|^{\ell}}_{\leq \left(\sup_{t \in K} |t|\right)^{\ell} =: T^{\ell}} \leq \underbrace{\|A\| e^{T\|A\|}}_{\text{unabh. von } t} < \infty.$$

daher $\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^{k+1} t^k - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^{k+1} t^k \right\|$

$$= \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^{k+1} t^k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \left\| \frac{1}{k!} A^{k+1} t^k \right\|$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^{k+1} |t|^k \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^{k+1} T^k \text{ konv.} \xrightarrow{m \to \infty} 0$$

Fazit: Man darf gldw. diff. auf K

Jedes $t \in \mathbb{R}$ liegt in einem K

$\Rightarrow$ Man darf gldw. diff. bei jedem t. $\square$

Bew Beh 1

$$\dot{\underline{x}} = \frac{d}{dt}\left(e^{At}\underline{x}_0\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(e^{At}\right)\underline{x}_0$$

$$= A\,e^{At}\,\underline{x}_0 = A\,\underline{x}(t)$$

$$\underline{x}(0) = e^{A0}\underline{x}_0 = E_n\,\underline{x}_0 = \underline{x}_0 . \qquad \square$$

Fundamentalsystem

Def Fund.syst. = Basis von L_h

Satz 9.5(b) Betrachte $\underline{\dot{x}} = A(t)\,\underline{x}$ (1)

mit $A: I \to M_n(\mathbb{C})$ st., $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $t_0 \in I$. Äq. sind:

(i) $\{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m\}$ ist lin. unabh. in L_h

(ii) $\forall t \in I: \{\underline{x}_1(t), \dots, \underline{x}_m(t)\}$ lin. unabh. in $\mathbb{R}^n$

(iii) $\{\underline{x}_1(t_0), \dots, \underline{x}_m(t_0)\}$ lin. unabh. in $\mathbb{R}^n$.

Bew (i) ⇒ (ii). Sei $\bar{t} \in I$ bel. Z.z: Wenn $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \underline{x}_j(\bar{t}) = \underline{0} \in \mathbb{R}^n$,

dann $\lambda_j = 0 \ \forall j$.

Setze $\underline{x}(t) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, \underline{x}_j(t)$

a) Linearität von (1) $\Longrightarrow$ $\underline{x} : I \to \mathbb{R}^n$ ist Lsg von (1).

b) $\underline{x}(\bar{t}) = \underline{0}$. Eind. der Lsg., AZ $\bar{t}$ $\Longrightarrow$ $\underline{x}(t) = \underline{0} \ \forall t \in I$

Also $\sum_j \lambda_j \underline{x}_j = 0$ in $C^1(I, \mathbb{R}^n) \overset{(i)}{\Longrightarrow} \lambda_j = 0 \ \forall j$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) klar.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Z.z.: Wenn $\sum \lambda_j \underline{x}_j = 0$ in L_h, dann $\lambda_j = 0 \ \forall j$.

Dann insbes. $\sum \lambda_j \underline{x}_j(t_0) = \underline{0} \overset{(iii)}{\Longrightarrow} \lambda_j = 0 \ \forall j$. $\square$

Bem Entsprechend für höhere Ordg:

$$\frac{d^r \underline{x}}{dt^r} = \sum_{k=0}^{r-1} A_k(t) \frac{d^k \underline{x}}{dt^k} \qquad (2)$$

Für $\underline{x} \in L_h$ und $t \in I$ definiere

$$\alpha(t) := \begin{pmatrix} \underline{x}(t) \\ \dot{\underline{x}}(t) \\ \vdots \\ \frac{d^{r-1}\underline{x}}{dt^{r-1}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nr}$$

$\alpha(t)$ = Phasenpunkt zu t, $\alpha(t_0)$ geeignet als Anfangsdaten

Variante von Satz 9.5(b): Äq. sind

(i) $\{\underline{x}_1 \dots \underline{x}_m\}$ lin. unabh. in L_h

(ii) $\{\alpha_1 \dots \alpha_m\}$ lin. unabh. in $C^1(I, \mathbb{R}^{nr})$

(iii) $\forall t \in I$: $\{\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t)\}$ lin. unabh. in $\mathbb{R}^{nr}$

(iv) $\{\alpha_1(t_0), \dots, \alpha_m(t_0)\}$ lin. unabh. in $\mathbb{R}^{nr}$.

Bew (i) $\Rightarrow$ (ii) $\quad \sum \lambda_j \alpha_j = 0$

erste n Komponenten $\sum \lambda_j x_j = 0$

$$\overset{(i)}{\Longrightarrow} \lambda_j = 0 \quad \forall j.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Wir zeigen: $\{\underline{x}_1 .. \underline{x}_m\}$ lin. abh.

$\Longrightarrow \{\alpha_1 .. \alpha_m\}$ lin abh.

oBdA $\quad \underline{x}_1 = \sum_{j=2}^{m} c_j \underline{x}_j$

$$\Longrightarrow \dot{\underline{x}}_1 = \sum_{j=2}^{m} c_j \dot{\underline{x}}_j \quad \text{etc. höhere Abl.en}$$

$$\Longrightarrow \alpha_1 = \sum_{j=2}^{m} c_j \alpha_j \quad \Rightarrow \{\alpha_1 .. \alpha_m\} \text{ lin abh.}$$

$\square$

Rest: 9.5 (b)

Def Die <u>Wronski-Determinante</u>

von $\underline{x}_1 \dots \underline{x}_{nr} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$

bei $t \in I$ ist

$$W(t) := \det \begin{pmatrix} \underline{x}_1(t) & \underline{x}_2(t) & \dots & \underline{x}_{nr}(t) \\ \dot{\underline{x}}_1(t) & \vdots & & \dot{\underline{x}}_{nr}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{x}_1^{(r-1)}(t) & \vdots & & \underline{x}_{nr}^{(r-1)}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \det \left(\alpha_1(t) \quad \alpha_2(t) \quad \dots \quad \alpha_{nr}(t) \right)$$

Korollar Seien $\underline{x}_1 \dots \underline{x}_{nr} \in L_h$ für (2). Äq sind:

(i) $\{\underline{x}_1 \dots \underline{x}_{nr}\}$ lin unabh. in L_h ($\Leftrightarrow$ ist Fund. system)

(ii) $W(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

(iii) $W(t_0) \neq 0$.

Bsp für Wronski-Det.

$\ddot{x} = -\omega^2 x$ harm. Osz. $(\omega > 0)$

Fund. syst. $\{ t \mapsto \underbrace{\cos \omega t}_{x_1(t)},\ t \mapsto \underbrace{\sin \omega t}_{x_2(t)} \}$

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{vmatrix}$$

$$= \omega \cos^2 \omega t + \omega \sin^2 \omega t = \omega \neq 0.$$

Bem 9.6 Betrachte $\underline{\dot{x}} = A(t)\underline{x}$ (1)

mit $A: I \to M_n(\mathbb{R})$ st., $t_0 \in I$

Flussabbildung = "Propagator"

$$\Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\Phi_t \underline{x}(t_0) = \underline{x}(t) \quad \forall \text{ max. Lsg. } \underline{x}$$

ÜA: Φ_t ist linear

$$\frac{d}{dt}\Phi_t = A(t)\Phi_t, \qquad \Phi_{t_0} = E_n$$

Die Spalten von Φ_t bilden ein Fundamentalsystem.

Bsp $A(t) = A \Rightarrow \Phi_t = e^{A(t-t_0)}$.